Auflösung

gewisser algebraischer Eliminationsaufgaben

durch Benützung

der Teilungsgleichungen der p-Funktion.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der Königl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 14. März 1905

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Franz Thalreiter

aus Zwiesel.

München 1905.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549027_0145

Einleitung.

Die Gleichung der allgemeinen Kurve 3. Ordnung läßt sich in Parameterform darstellen[1]):

$$\varrho z_i = \Delta(\varkappa^2 - \frac{1}{6} S\lambda^2) x_i - 4\lambda^2 m_i + 4\varkappa\lambda l_i \pm n_i \sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{T}{3}\lambda^3)}.$$

In diese Gleichung kann man die $\wp$-Funktion einführen, wenn man setzt:

$$\varkappa = \wp u, \quad \lambda = 1$$

und erhält die Gleichung der Kurve 3. Ordnung jetzt in der Form:

$$\varrho z_i = -4 m_i + 4 l_i \wp + \sqrt{\frac{3}{2} \cdot n_i \cdot \wp' + \frac{1}{6} \Delta x_i \wp''} \quad \text{(C.—L. p. 653).}^2)$$

Die x_i sind die Coordinaten eines beliebigen festen Punkt x auf der Kurve, N ist der Tangentialpunkt von x; x hat das Argument 0 und N das Argument $u = -u_0$, wobei:

$$\wp u = \frac{4\psi}{\Delta^2} \qquad \text{(C.—L. p. 654).}$$

Bei dieser Darstellung ist der Tangentialpunkt N der Scheitel des Strahlenbüschels

$$\wp u = \frac{a_x^2 \, a_z}{a_x^2 \, a_z}$$

und zwar ist diese Darstellung der Punkte auf der C_3 eine eindeutige, indem ein Paar auf demselben Strahle des Büschels gelegener Punkte jetzt durch die Argumente $+u$ und $-u$ unterschieden wird.

---

[1]) Siehe Clebsch-Lindemann pag. 647 und Math. Annalen Bd. 1 pag. 89.

[2]) Unter C.—L. werden die „Vorlesungen über Geometrie" von A. Clebsch, bearbeitet von Dr. F. Lindemann, zitiert.

Die Einführung der elliptischen Funktionen führt nun zur Auflösung gewisser algebraischer Eliminationsaufgaben, wie im Folgenden besprochen werden soll und zwar werden zunächst die Theorie der Steinerschen Polygone, sodann verwandte Aufgaben, z. B. die Theorie der Wendepunkte einer näheren Untersuchung unterzogen.

Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen eine Ausführung der in Clebsch-Lindemann Band I pag. 653—660 gegebenen Ansätze.

Als Literatur wurden ferner benützt:

Math. Annalen, Bd. 1 „Über die Theorie der kubischen Formen" von Clebsch und Gordan.

Math. Annalen, Bd. 6 „Über kubische ternäre Formen" von Clebsch und Gordan.

Crelles Journal, Bd. 63 „Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Kurven 3. Ordnung" von A. Clebsch.

Mathematikai és Természettu dományi Értesitö, VIII., IX., X. Kötet, lap. 23, 18, 2: Vályi Gyula „A Harmadrendü algebrai Görbék Elméletéhez".

Die Symbolik ist ganz dieselbe wie in dem oben erwähnten Werke von Clebsch-Lindemann, wo auch Abkürzungen nachgesehen werden können.

Zu wärmstem Danke verpflichtet bin ich Herrn Universitätsprofessor Dr. F. Lindemann sowohl für die Stellung des Themas als auch für die wohlwollende Unterstützung während der Ausführung.

I. Teil.

§ 1.

Theorie der Steinerschen Polygone.

Um ein solches Polygon zu konstruieren, zieht man bekanntlich durch einen festen Punkt A der Kurve 3. Ordnung, der das Argument v haben soll, eine beliebige Gerade, die in zwei Punkten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ die C_3 schneiden soll; dann verbindet man $x^{(2)}$ mit einem andern festen Punkt B (Argument $= u$) und sucht den 3. Schnittpunkt $x^{(3)}$, zieht jetzt $x^{(3)}A$ und erhält $x^{(4)}$ u. s. w.

Es sei nun Punkt A auf der C_3 gegeben und man sucht die Punkte B mit der Eigenschaft, daß nach obiger Konstruktion ein geschlossenes Polygon von $2n$ Seiten entsteht.

Die Lösung dieses Problems für die allgemeine Kurve 3. Ordnung wurde zuerst im 63. Bande des Crelle-Journal pag. 106 von A. Clebsch mit Hilfe elliptischer Funktionen gegeben, indem das Fundamentaltheorem angewandt wurde:

„Für die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kurve 3. Ordnung ist die Summe ihrer Argumente konstant:“

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_0 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}.$$

Man erhält dadurch unmittelbar, wenn man den Punkten $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots\ldots x^{(2n)}$ die Argumente c_1, $c_2 \ldots\ldots c_{2n}$ zuteilt:

$$\begin{aligned}
v + c_1 + c_2 + u_0 &\equiv 0, & u + c_2 + c_3 + u_0 &\equiv 0,\\
v + c_3 + c_4 + u_0 &\equiv 0, & u + c_4 + c_5 + u_0 &\equiv 0,\\
&\vdots & &\vdots\\
v + c_{2n-1} + c_{2n} + u_0 &\equiv 0, & u + c_{2n} + c_1 + u_0 &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$nu + \sum_1^{2n} c_i + nu_0 \equiv 0$$

$$nv + \sum_1^{2n} c_i + nu_0 \equiv 0$$

also
$$u \equiv v + \frac{1}{n}(p\omega + q\omega'). \qquad (1.)$$

Durch diese Gleichung ist u mehrdeutig bestimmt. Will man die zu v gehörigen Punkte daraus wirklich berechnen, so hat man:

$$\wp u = \wp\left(v + \frac{1}{n}(p\omega + q\omega')\right) \qquad (2.)$$

und man hat demnach das Problem der n-Teilung der elliptischen Funktionen zu lösen, indem man setzt $v = \frac{\beta}{n}$ und erhält:

$$\wp u = \wp \frac{\beta + p\omega + q\omega'}{n};$$

man muß also $\wp \frac{\beta + p\omega + q\omega'}{n}$ aus $\wp(\beta)$ berechnen.

Wendet man die Kiepertschen Formeln [1]) an, so kann man die Lösung der Aufgabe in folgender Weise bewerkstelligen. Man geht zu diesem Zwecke von der Form aus:

$$nu = nv + p\omega + q\omega'$$

$$\wp(nu) = \wp(nv + p\omega + q\omega') = \wp(nv).$$

Nun ist:

$$\wp nu = \wp u - \frac{\psi_{n-1}(u) \cdot \psi_{n+1}(u)}{\psi_n^2 u}, \qquad (3.)$$

wenn die Funktion $\psi_n(u)$ durch folgende Determinante bestimmt ist:

$$\psi_n(u) = \frac{(-1)^{n-1}}{[2!\ 3! \ldots (n-1)!]^2} \begin{vmatrix} \wp' & \wp'' & \ldots & \wp^{(n-1)} \\ \wp'' & \wp''' & \ldots & \wp^{(n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \wp^{(n-1)} & \wp^{(n)} & \ldots & \wp^{(2n-3)} \end{vmatrix} \qquad (4.)$$

[1]) Crelles Journal Band 76.

und wo ferner für $\wp'$, $\wp''$ . . . . . [1]) die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} \wp'^2 &= 4\wp^3 - 2S\wp + \frac{4}{3}T \\ \wp'' &= 6\wp^2 - S \\ \wp''' &= 12\wp\wp' \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5.}$$

$$\wp^{(n+2)} = 6\left(\wp\wp^{(n)} + \frac{n}{1}\wp'\wp^{(n-1)} + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}\wp''\wp^{(n-2)} + \ldots\ldots \wp^{(n)}\wp\right).$$

Man erhält auf diese Weise für obige Bedingungsgleichung

$$\wp nu = \wp nv$$

$$\wp u - \frac{\psi_{n-1}(u)\cdot\psi_{n+1}(u)}{\psi_n^2(u)} = \wp v - \frac{\psi_{n-1}(v)\cdot\psi_{n+1}(v)}{\psi_n^2(v)} \tag{6.}$$

oder

$$\left\{\wp u\cdot\psi_n^2(u) - \psi_{n-1}(u)\cdot\psi_{n+1}(u)\right\}\psi_n^2(v) = \left\{\wp v\cdot\psi_n^2(v) - \psi_{n-1}(v)\cdot\psi_{n+1}(v)\right\}\psi_n^2(u). \tag{7.}$$

Setzt man nun die Werte für die Determinanten ψ_{n-1}, ψ_n und ψ_{n+1} unter Benützung obiger Formeln in diese Gleichung ein, so erhält man hieraus für $\wp u$ eine Gleichung vom Grade n^2, die sich, wenn n Primzahl ist, mit Hilfe von Wurzelzeichen durch die Wurzeln einer einzigen Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades berechnen läßt.

Man erhät so n^2 Lösungen, die zu dem gegebenen Punkte mit dem Argument v ein Steinersches Punktepaar bilden. Eine Lösung wird aber unbrauchbar, nämlich $u = v$. Setzt man nun:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_z}{a_x^2 a_z}, \qquad \wp' u = \sqrt{4\wp^3 u - 2S\wp u + \frac{4}{3}T},$$

$$\wp v = \frac{a_x^2 a_y}{a_x^2 a_y}, \qquad \wp' v = \sqrt{4\wp^3 v - 2S\wp v + \frac{4}{3}T},$$

wo angenommen wird, daß z_i die ternären Koordinaten des Punktes B und y_i die des Puntes A sein sollen und daß ihnen das positive Zeichen der Quadratwurzel zukommt, so erhält man eine Kurve von der Ordnung n^2, welche in n^2 Strahlen zerfällt, deren Scheitel der

---

[1]) c. f. C.—L. pag. 653.

Tangentialpunkt N von x ist, und die mir auf meiner C_3 die gesuchten Punkte ausschneiden, unter denen sich, wie oben bemerkt, noch der Punkt A selbst befindet.

Anstatt also der Reihe nach die folgenden Gleichungen aufzustellen:

$$(x^{(1)}\,x^{(2)}\,y) = 0, \quad (x^{(3)}\,x^{(4)}\,y) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (x^{(2n-1)}\,x^{(2n)}\,y) = 0,$$
$$(x^{(2)}\,x^{(3)}\,z) = 0, \quad (x^{(4)}\,x^{(5)}\,z) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (x^{(2n)}\quad x^{(1)}\quad z) = 0,$$

wobei $\qquad a^3_{x^{(1)}} = 0, \qquad a^3_{x^{(2)}} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad a^3_{x^{(2n)}} = 0$

und aus diesen Gleichungen sämtliche $x^{(i)}$ bis auf eine zu eliminieren, wodurch wir auf eine Gleichung

$$F(z, y, x^{(k)}) = 0$$

kämen, wobei dem $x^{(k)}$ ein beliebiger Wert gegeben werden kann, ohne daß dadurch die Beziehung zwischen z und y geändert wird (da ja die Mannigfaltigkeit der Steinerschen Polygone bei gegebenem Punkt ∞^1 ist), haben wir also die Relation

$$F(z, y) = 0$$

in der Weise hergestellt, daß wir in Gleichung (7.) setzen:

$$\wp u = \frac{a_x^2\, a_z}{a_x^2\, a_z}, \qquad \wp v = \frac{a_x^2\, a_y}{a_x^2\, a_y}.$$

Auch in dieser Relation kommt dann der willkürliche Punkt x vor, der nur an die Bedingung gebunden ist, daß er auf der Kurve $f = 0$ liegt.

Man sieht, daß die Gleichung (7.) in u und v, also in z und y vollständig symmetrisch ist, woraus gefolgert werden kann, daß die Punkte z und y vollständig vertauschbar sind.

Um eine einfachere Gleichung zu bekommen, lassen wir den Punkt v mit dem willkürlichen Punkt x zusammenfallen. Da x den Parameter 0 hat, haben wir die Gleichungen:

$$\wp n v = \wp n u = \wp u - \frac{\psi_{n-1}(u) \cdot \psi_{n+1}(u)}{\psi_n^2 u}, \text{ wo } v = 0 \qquad (8.)$$

$$\wp n v - \wp u + \frac{\psi_{n-1}(u) \cdot \psi_{n+1}(u)}{\psi_n^2 u} = 0, \quad \text{wo } v = 0.$$

Diese Gleichung kann auf zweierlei Weise erfüllt werden, entweder dadurch daß $u = p\omega + q\omega'$ oder eine davon verschiedene Zahl genommen wird. Da dann aber mit $\wp u$ alle Abgeleiteten von $\wp u$ endlich bleiben, $\wp 0$ aber ∞ ist, so muß notwendig werden:

$$\psi_n^2 \mu = 0. \tag{9.}$$

Diese Gleichung ist vom Grade $n^2 - 1$ in $\wp u$. Weitere Reduktionen dieser Gleichung können wir nur dann vornehmen, wenn wir zwischen Primzahlen und Nichtprimzahlen unterscheiden.

Ist n eine ungerade Primzahl, so können wir sofort schreiben

$$\psi_n u = 0, \tag{10.}$$

da der Satz gilt:

> $\psi_n u$ ist für ein ungerades n eine ganze rationale Funktion von $\wp u$ allein.[1])

Setzt man dann:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_z}{a_x^2 a_z},$$

so ist für die Steinerschen Punkte die Lösung in vereinfachter Form gegeben. Was diese Reduktion geometrisch bedeutet, werden wir später sehen.

Es sei nun n Nicht-Primzahl. In diesem Falle muß die Gleichung $\psi_n^2 u = 0$ beibehalten werden, da erst diese[1]) und nicht $\psi_n u = 0$ eine rationale Funktion von $\wp u$ ist. Es müssen hier verschiedene Typen von Steinerschen Polygonen unterschieden werden, indem neben Steinerschen Punkten, die $2n$-Ecke liefern, auch solche Punkte vorkommen, die Polygone von geringerer Seitenzahl liefern, welche dann mehrmals umlaufen werden.

Wir benutzen den von A. Clebsch im Crelles Journal Band 63 aufgestellten Satz:

> „Zu jedem Punkte A der Kurve gehören soviele wirkliche $2n$-Ecke liefernde Punkte B, als Zahlenpaare p, q $(< n)$ existieren, welche mit n keinen Faktor gemein haben."

Und diese suchen wir ja nur, weil die andern Punkte schon bei Teilern von n vorkommen. Wir haben also die Anzahl der Zahlenpaare p, q $(< n)$ aufzustellen, die mit n keinen gemeinsamen Faktor haben.

---

[1]) Crelles Journal Band 76 pag. 30.

Wir nehmen an:

n habe $s = n - \varphi(n)$[1] Teiler $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots \delta_s$,

von denen t zu einander relativ prim seien, dann ergibt sich für die gesuchte Zahl:

$$n^2 - s^2 + 2t,$$

denn von den n^2 Zahlenpaaren p, q scheiden wir alle s^2 Kombinationen von Teilern aus. Damit haben wir aber zuviel ausgeschieden, nämlich jede Kombination zweier relativ primer Teile 2 mal; wir haben also $2t$ hinzuzuzählen.

Die Zahl t läßt sich in jedem Falle leicht abzählen.

Um also die Gleichung vom Grade

$$n^2 - s^2 + 2t$$

zu bekommen, hat man zu bilden:

$$\frac{\psi_n^2}{\psi_\alpha^2 \cdot \psi_\beta^2 \ldots\ldots} = 0, \qquad (11.)$$

wobei α, $\beta \ldots\ldots$ Teiler von n sind, und ψ_α, $\psi_\beta \ldots\ldots$ diejenigen Steinerschen Punkte liefern, die schon 2α, $2\beta \ldots\ldots$ Ecke ergeben.

Diese Überlegung soll später für den Fall $n = 4$ näher ausgeführt werden.

Obiger Quotient (11.) wird dann das Quadrat einer ganzen rationalen Funktion von $\wp u$ und läßt sich ebenfalls reduzieren.

Dies läßt sich geometrisch ganz leicht einsehen. Konstruiert man nämlich zum Punkt x den Tangentialpunkt N, so ist dieser der Scheitel eines Strahlenbüschels, welches die zu x gehörigen Steinerschen Punkte ausschneidet. Nun schneidet aber jeder Strahl bei unserm einfachen Parametersystem zwei Steinersche Punkte aus, was direkt aus folgender Relation sich ergibt:

$$-u_0 + \frac{p\omega + q\omega'}{n} + \frac{(n-p)\omega + (n-q)\omega'}{n} \equiv -u_0 \text{ (Abelscher Satz).}$$

Ist n Primzahl[2]), so hat man direkt $\frac{n^2-1}{2}$ Strahlen; ist hingegen n Nicht-Primzahl, so erhält man:

$$\frac{n^2 - s^2 + 2t}{2}$$

---

[1]) $\varphi(n)$ ist die Anzahl der zu n primen Zahlen, welche kleiner als n sind.

[2]) Ausnahme $n = 2$.

Strahlen, wenn man nämlich von den n^2-1 Strahlen die zu den obigen Teilern α, β . . . . . gehörenden Strahlen abzieht.

Der Punkt x ist hiebei nicht besonders ausgezeichnet, sondern man kann in dem ganzen System von Punkten auch irgend einen andern als gegeben annehmen, konstruiert hiezu den Tangentialpunkt und hat von diesen aus wieder $\frac{n^2-1}{2}$ Strahlen. Diese schneiden aber die Kurve 3. Ordnung in denselben Punkten, die wir zuerst gefunden haben.

Wenn n eine Primzahl ist, so gelten die Sätze:

Satz 1: Konstruiert man zu jedem Steinerschen Punkt den Tangentialpunkt und verbindet diese mit dem Anfangspunkt x, so liefern alle dritten Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit der Kurve 3. Ordnung keine neuen Punkte, sondern dasselbe Steinersche Punktsystem.

Satz 2: Dasselbe System von Steinerschen Punkten erhält man schon durch Konstruktion der Tangentialpunkte zu allen Steinerschen Punkten, wenn x ein Wendepunkt ist, der Tangentialpunkt N von x demnach mit x zusammenfällt.

Der Beweis des 1. Satzes folgt direkt aus der Überlegung, daß alle zu x gehörigen Steinerschen Punkte mit x gleichberechtigt sind. Wenn ich also mit diesen die gleiche Konstruktion mache wie mit x, so bekomme ich wieder dasselbe System.

Um den 2. Satz zu beweisen, zeigt man, daß auch die Tangentialpunkte eines Steinerschen Punktesystems ein Steinersches System bilden.

Sind nämlich (bei allgemeinem Parametersystem) u und v zwei Steinersche Punkte, d. h.

$$nu = nv,$$

so heißen ihre Tangentialpunkte:

$$-2u-u_0 \quad \text{und} \quad -2v-u_0$$

und für diese ist, wie man sofort sieht, die Relation erfüllt:

$$n(-2u-u_0) \equiv n(-2v-u_0).$$

Soll nun der Tangentialpunkt von x mit x zusammenfallen (Wendepunkt), so fallen zwei Systeme zusammen, da ein System Steinerscher Punkte durch einen einzigen Punkt bestimmt ist.

Diese allgemeine Eliminationstheorie soll nun an einzelnen Beispielen für $n = 2$, 3 und 4 erläutert werden.

§ 2.

Beispiele.

$n = 2$.

Dieser Fall ist der einfachste und deswegen vielfach in der Literatur behandelt. Er führt nämlich auf die dem Punkt x zugeordneten Pole.[1])

Es ist nach der allgemeinen Theorie:

$$2u = 2v \qquad (1.)$$

und indem wir den gegebenen Punkt mit x zusammenfallen lassen,

also $v = 0$ setzen,

dann wird:

$$u = \frac{p\omega + q\omega'}{2},$$

d. h. die vier Steinerschen Punkte haben die Argumente:

$$0, \quad \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega'}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Man soll die Strahlen vom Tangentialpunkt N aus analytisch aufsuchen.

Dazu geht man aus von:

$$\wp 2v = \wp 2u = \wp u - \frac{1}{4} \cdot \frac{12\,\wp u\,\wp'^2 u - \wp''^2 u}{\wp'^2 u}, \quad \text{wo } v = 0$$

oder

$$\wp'^2 u\,(\wp 2v - \wp u) + \frac{1}{4}\,(12\,\wp u \cdot \wp'^2 u - \wp''^2 u) = 0. \qquad (2.)$$

Es ist aber $\wp 0 = \infty$, also kann entweder $\wp 0 = \wp u$, d. h. $u = 0$ sein und die obige Gleichung ist befriedigt oder es ist $u = \frac{p\omega + q\omega'}{2}$.

Dann ist sowohl $\wp\left(\frac{p\omega + q\omega'}{2}\right)$, $\wp'\left(\frac{p\omega + q\omega'}{2}\right)$ als auch $\wp''\left(\frac{p\omega + q\omega'}{2}\right)$ endlich, denn $\wp$, $\wp'$ und $\wp''$ werden nur ∞, wenn das Argument $\equiv 0$ wird.

---

[1]) Crelles Journal Band 63, pag. 111; C.—L. pag. 527; Harnack: Mathem. Annalen Band 9.

Da demnach wie gesagt, $\wp 0 = \infty$, muß notwendig werden:

$$\wp'^2 u = \psi_2^2 = 0$$

oder

$$4\wp^3 - 2S\wp + \frac{4}{3}T = 0 \qquad (3.)$$

und für

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_z}{a_x^2 a_z}:$$

$$4(a_x^2 a_z)^3 - 2S(a_x^2 a_z)(a_x^2 a_z)^2 + \frac{4}{3}T(a_x^2 a_z)^3 = 0. \qquad (4.)$$

Diese Gleichung ist aber nichts anderes als:

$$4G_1(a_x^2 a_z, \; -a_x^2 a_z) = 0, \qquad (5.)$$

wo folgende Definitionen eingeführt sind:

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4$$

$$G_1 = \varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3.$$

Wie man weiß, bestimmt die Gleichung

$$\wp'^2 u = 0$$

die Tangenten vom Tangentialpunkt N aus an die Kurve 3. Ordnung.[1])

Wir wollen hier dieses Resultat noch in anderer Weise analytisch ableiten und zwar unter Benützung der sogenannten typischen Darstellung von $H(z)$.[2])

Bezeichnet man nämlich mit z die variablen Punktkoordinaten, mit t die festen Werte eines beliebigen Punktes der Kurve 3. Ordnung, so ist das Produkt der vier Tangenten, welche vom Punkte t an die Kurve $f = a_z^3 = 0$ gehen, durch die Form gegeben:

$$4a_z^3 b_z b_t^2 - 3a_z^2 a_t \cdot b_z^2 b_t = 0.^3) \qquad (6.)$$

Multipliziere ich also die Gleichung (5.) mit der Gleichung der Tangente in x, also $a_x^2 a_z = 0$, und setze in Gleichung (6.)

$$t_i = n_i,$$

so müssen sich beide Gleichungen bloß um einen Faktor unterscheiden.

---

[1]) c. f. C.—L, pag. 647. [2]) C.—L. pag. 643.

[3]) Math. Annalen Band 9: Harnack „Zur Theorie der ternären kubischen Formen."

Um das zu zeigen, geht man von der typischen Darstellung von $H(z)$ aus:

$$\Gamma^2 H(z) = \frac{3}{4}\xi^2\zeta - \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{9}{4}\psi\xi\zeta^2 + \frac{3}{2}\Omega\eta\zeta^2 + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)\zeta^3 \quad (7.)$$

Der Punkt $N = 0$, von dem aus die Tangenten an die Kurve gezogen werden sollen, hat die Koordinaten:

$$\xi' = 0, \quad \zeta' = 0 \text{ und } \eta' \text{ beliebig.}$$

Man erhält:

$$b_z^2 b_t = \frac{1}{3}\left(-\xi\eta + \frac{3}{2}\Omega\zeta^2\right)\eta',$$

indem $b_z^2 b_t$ hervorgeht aus:

$$b_z^2 b_t = \frac{1}{3}\left[\frac{\partial H}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial H}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial H}{\partial \zeta}\zeta'\right]$$

wo

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{3}{2}\xi\zeta - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{9}{4}\psi\zeta^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = -\xi\eta + \frac{3}{2}\Omega\zeta^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{9}{2}\psi\xi\zeta + 3\Omega\eta\zeta + \frac{9}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)\zeta^2.$$

Nimmt man nun, da η' beliebig ist, $\eta' = 1$, so hat man:

$$b_z^2 b_t = \frac{1}{3}\left(-\xi\eta + \frac{3}{2}\Omega\zeta^2\right) \quad (8.)$$

und hieraus

$$b_z b_t^2 = -\frac{1}{6}\xi. \quad (9.)$$

Die Gleichung auf pag. 13 (6.) geht über in:

$$-\frac{2}{3}H\cdot\xi - \frac{1}{3}\left(-\xi\eta + \frac{3}{2}\Omega\zeta^2\right)^2 = 0$$

oder

$$-\frac{1}{2}\xi^3\zeta + \frac{1}{3}\xi^2\eta^2 - \frac{3}{2}\psi\xi^2\zeta^2 - \Omega\eta\zeta^2\xi - \frac{1}{2}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)\zeta^3\xi$$

$$-\frac{3}{4}\Omega^2\zeta^4 - \frac{1}{3}\xi^2\eta^2 + \Omega\eta\xi\zeta^2 = 0,$$

oder $$2\xi^3\zeta + 6\psi\xi^2\zeta^2 + 2\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)\zeta^3\xi + 3\Omega^2\zeta^4 = 0, \quad (10.)$$

hier kann man ζ ausscheiden und erhält als die eine Tangente von N nach x, wie es sein muß: $\zeta = 0$.

Die Gleichung der übrigen drei Tangenten lautet dann:

$$2\xi^3 + 6\psi\xi^2\zeta + 2\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)\zeta^2\xi + 3\Omega^2\zeta^3 = 0. \quad (11.)$$

Man kann nun wie in Clebsch-Lindemann pag. 646 für ξ und ζ setzen:

$$\xi = N\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right) \quad \text{und} \quad \zeta = N\lambda,$$

wenn bedeutet:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_z}{a_x^2 a_z} = \frac{\varkappa}{-\lambda}.$$

Obige Gleichung geht dann in folgende über:

$$2N^3\left(\frac{1}{64}\varkappa^3\Delta^6 - \frac{3}{16}\varkappa^2\Delta^4\lambda\psi + \frac{3}{4}\varkappa\Delta^2\lambda^2\psi^2 - \lambda^3\psi^3\right)$$

$$+ 6\psi N^3\lambda\left(\frac{1}{16}\varkappa^2\Delta^4 + \lambda^2\psi^2 - \frac{1}{2}\varkappa\Delta^2\lambda\psi\right)$$

$$+ 2\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)N^3\lambda^2\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right) + 3\Omega^2N^3\lambda^3 = 0$$

oder

$$\frac{1}{32}\varkappa^3\Delta^6 - \frac{1}{64}S_{\Delta,-f}\cdot\Delta^2\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{16}S_{\Delta,-f}\cdot\lambda^3\psi + 3\Omega^2\lambda^3 - 2\lambda^3\psi^3 = 0. \quad (12.)$$

Nun kann man Ω^2 durch die Formen f, ψ und Δ mittels der Gleichung ausdrücken[1]):

$$24^2\Omega^2 = 384\psi^3 - 12\psi S_{\Delta,-f} + 2T_{\Delta,-f}.$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung (12.) ein und bemerkt noch, daß $S_{\Delta,-f}$, $T_{\Delta,-f}$ für $f = 0$ bezw. in $S\Delta^4$ und $T\Delta^6$ übergehen, so erhält man schließlich:

$$\frac{1}{32}\Delta^6\left(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{T}{3}\lambda^3\right) = 0, \quad (13.)$$

[1]) Clebsch-Lindemann pag. 640; Math. Annalen Band 1 pag. 12.

d. h. $$\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{T}{3}\lambda^3 = 0,$$

oder $$G_1(\wp, -1) = 0.$$

Auf diese Weise kann man also auch sehen, daß die drei Strahlen, welche vom Tangentialpunkt N nach den zu x gehörigen Steinerschen Punkten gehen, nichts anderes sind als die drei Tangenten von N an die C_3. Setzt man noch

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_z}{a_x^2 a_z}$$

so wird wieder

$$(a_x^2 a_z)^3 - \frac{S}{2}(a_x^2 a_z)(a_x^2 a_z)^2 + \frac{T}{3}(a_x^2 a_z)^3 = 0,$$

also dieselbe Gleichung wie die auf pag. 13 (4.) entwickelte.

$n = 3$.

Nach der in § 2 getroffenen Spezialisierung hat man

$$3v \equiv 0, \quad \wp 3v = \infty.$$

Ein Steinerscher Punkt hat, da auch $\wp 3u = \infty$, das Argument 0 und fällt, wie es sein muß, mit x zusammen; die andern acht Punkte haben die Argumente

$$\frac{p\omega + q\omega'}{3},$$

also $$\frac{\omega}{3}, \frac{2\omega}{3}; \quad \frac{\omega'}{3}, \frac{2\omega'}{3}; \quad \frac{\omega+\omega'}{3}, \frac{2\omega+2\omega'}{3}; \quad \frac{\omega+2\omega'}{3}, \frac{2\omega+\omega'}{3}.$$

Man soll die Strahlen von N nach diesen Punkten analytisch aufsuchen.

Nach allgemeiner Überlegung hat man

$$\psi_3 = \frac{1}{4}(12\wp\wp''^2 - \wp''^2) = 0. \qquad (14.)$$

Dies ist eine Gleichung 4. Grades und führt auf

$$\left(\wp^4 - S\wp^2 + \frac{4}{3}T\wp - \frac{1}{12}S^2\right) = G(\varkappa, \lambda)_{\substack{\varkappa=\wp \\ \lambda=-1}} = 0. \qquad (15.)$$

Setzt man $$\varrho u = \frac{a_x^2 a_z}{a_x^2 a_z},$$

so ist $$G(a_x^2 a_{z'} - a_x^2 a_z) = 0. \qquad (16.)$$

Die vier Strahlen $G(\varkappa, \lambda)$ sind nun geometrisch betrachtet die vier linearen Polaren des Punktes x in Bezug auf die vier Wendepunktsdreiseite.

Schneide ein solcher Strahl den Punkt z aus, so liegt umgekehrt x auf dem Polarkegelschnitt dieses Punktes z in Bezug auf ein Wendepunktsdreiseit.

Die Polarkegelschnitte des Punktes z in Bezug auf alle Kurven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ haben vier gemeinsame Punkte auf der C_3, nämlich diejenigen Punkte, welche z zum Tangentialpunkt haben. Jeder hat außerdem noch zwei Schnittpunkte mit der Kurve 3. Ordnung. Ist nämlich der eine Schnittpunkt x ein Steinerscher Punkt, so muß es auch der andere werden, da die Verbindungslinie von x mit demselben durch den Tangentialpunkt von z geht. (Erzeugung der Kurven 3. Ordnung durch projektive Beziehung eines Kegelschnittes und eines Strahlenbüschels.)

Die zu x gehörenden acht Steinerschen Punkte erscheinen demnach in vier Paare getrennt, entsprechend den vier Kegelschnitten, welche sie ausschneiden, oder den vier Wurzeln von $G(\varkappa, \lambda) = 0$.

Der Fall $n = 3$ ist deshalb besonders bemerkenswert, als auch die Wendepunkte ein solches Steinersches Punktsystem bilden, wie man schon daraus sieht, daß auch hier die Gleichung

$$G(\varkappa, \lambda) = 0$$

auftritt. Dieses Strahlenbüschel ist vom Wendepunkte aus zu konstruieren, wobei jetzt definiert ist:

$\varkappa = \quad a_x^2 a_z = 0$ als die Tangente an Δ im Wendepunkte,
$\lambda = -a_x^2 a_z = 0$ als die Tangente an f im Wendepunkte.

Dieser Wendepunkt liegt aber wieder mit je zwei weiteren auf einer Geraden, also kommen nur die vier durch den Wendepunkt gehenden Wendepunktslinien in Betracht, die zu einander äquianharmonisch sind, da die 1. Invariante von G identisch verschwindet:

$$i_G = -2\left\{-\frac{1}{12}S^2 + 3 \cdot \frac{1}{36}S^2\right\} = 0.$$

Da das Wendepunktsproblem das wichtigste Problem der Kurven 3. Ordnung ist, so sollen die in Clebsch-Lindemann pag. 658 gegebenen Formeln später noch explizit angegeben werden.

Zu Konstruktion der acht gesuchten Punkte kann man in folgender Weise verfahren:

w_1 und w_i seien zwei Wendepunkte; verbinde den gegebenen Punkt x mit w_1 und den Schnittpunkt s mit w_i. Dann ist der weitere Schnittpunkt r_i einer der gesuchten acht Punkte, die ich alle erhalte, wenn wird:

$$i = 2, 3 \ldots\ldots 9.$$

Beweis:

x hat den Parameter 0 und N den Parameter $-u_0$. Dann sind die Wendepunkte gegeben durch

$$3u + u_0 = 0$$

oder
$$u \equiv -\frac{u_0}{3} + \frac{p\omega + q\omega'}{3}.$$

w_1 habe den Parameter $-\frac{u_0}{3}$, dann hat man für s

$$0 - \frac{u_0}{3} + s + u_0 \equiv 0$$

und hieraus
$$s \equiv -\frac{2}{3}u_0.$$

Ist ferner
$$w_i \equiv \frac{-u_0 + p\omega + q\omega'}{3},$$

so ist
$$r_i + \frac{-u_0 + p\omega + q\omega'}{3} - \frac{2}{3}u_0 + u_0 \equiv 0,$$

$$r_i + \frac{p\omega + q\omega'}{3} \equiv 0,$$

$$r_i \equiv -\frac{p\omega + q\omega'}{3};$$

Dies sind aber die gesuchten Punkte, z. B. $p = 1$, $q = 0$

$$r_i \equiv -\frac{\omega}{3} = -\frac{\omega}{3} + \omega = \frac{2}{3}\omega.$$

Bei den vorausgehenden Betrachtungen war die Kurve 3. Ordnung durch die Parameterdarstellung gegeben:

$$\varrho\, y_i = \Delta\,(\varkappa^2 - \frac{1}{6}\, S\,\lambda^2)\, x_i - 4\,\lambda^2\, m_i$$

$$+ 4\,\varkappa\,\lambda\, l_i \pm n_i \sqrt{6\,\lambda\,(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\,\varkappa\,\lambda^2 + \frac{T}{3}\,\lambda^3)}$$

und nach Einführung der $\wp$-Funktion:

$$\varrho\, y_i = -4\, m_i + 4\, l_i\, \wp\, v + \sqrt{\frac{3}{2}}\, n_i\, \wp' v + \frac{1}{6}\,\Delta\, x_i\, \wp'' v. \qquad (17.)$$

In obiger Parameterdarstellung kommt der gleiche Parameterwert nur 2 beweglichen Schnittpunkten des Strahlenbüschels zu:

$$\varkappa\, a_x^2\, a_y - \lambda\, a_x^2\, a_y = 0.$$

Anstatt jedoch nach dem Vorgange von Aronhold von dem zur Kurve 3. Ordnung gehörigen Integrale:[1])

$$d\,V = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\varkappa\, d\,\lambda - \lambda\, d\,\varkappa}{\sqrt{\lambda\left(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\,\varkappa\,\lambda^2 + \frac{1}{3}\,T\,\lambda^3\right)}}$$

auszugehen, kann nach Hermite auch das Integral[2]) benützt werden:

$$d\,V = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\Delta\, d\,\psi - 2\,\psi\, d\,\Delta}{\sqrt{16\,\psi^3 - \frac{1}{2}\, S\,\Delta^4\,\psi + \frac{1}{12}\, T\,\Delta^6}}.$$

Der Unterschied liegt, wie auf pag. 776, C.-L., ausgeführt ist, darin, daß jetzt allen 18 Schnittpunkten der C_6: $\varkappa\,\Delta^2 - 4\,\psi\,\lambda = 0$ mit $f = 0$ derselbe Parameterwert zukommt.

Setzen wir nun in Gleichung (17.)

$$v = \frac{u}{3}, \qquad \text{also} \quad \varkappa = \wp\, v = \wp\,\frac{u}{3},$$
$$\lambda = 1,$$

so ist: $\varrho\, y_i = -4\, m_i + 4\, l_i\, \wp\left(\frac{u}{3}\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}\, n_i\, \wp'\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{1}{6}\,\Delta\, x_i\, \wp''\left(\frac{u}{3}\right)$

[1]) Clebsch-Lindemann pag. 775. [2]) Clebsch-Lindemann pag. 776.

auch eine Parameterdarstellung unserer Kurve 3. Ordnung, da ich ja nur eine Transformation des Parameters vornehme. Gleiches $\varkappa$, λ liefern jetzt wie bei Hermite im ganzen 18 Punkte, nämlich zu jedem u 9 Punkte $\frac{u}{3}$, wie aus der Teilung der elliptischen Funktionen folgt.

Ist also:

$$\varkappa = \wp\left(\frac{u + p\,\omega + q\,\omega'}{3}\right),$$

so hat man für die 18 Punkte die Argumente:

$$\frac{u}{3}, \qquad \frac{u+\omega}{3}, \qquad \frac{u+\omega'}{3} \ldots\ldots$$

$$-\frac{u}{3}, \qquad -\frac{u+\omega}{3}, \qquad -\frac{u+\omega'}{3} \ldots\ldots$$

Geometrisch stellt die 1. Argumentenreihe die zu einem Punkte zur Zahl $n = 3$ gehörigen Steinerschen Punkte dar; die Punkte in der 2. Reihe sind die Schnittpunkte auf der C_3 durch die Verbindungsgeraden des in der Parameterdarstellung benutzten, aber beliebigen Punktes $N = (a\,a\,u)\,a_x^2\,a_x^{\nu}$ mit obigen Steinerschen Punkten. Anstatt des Strahlenbüschels $\varkappa\,a_x^2\,a_y - \lambda\,a_x^2\,a_y = 0$ vom Punkte N aus, schneide ich die C_3 mit einem System von Kurven 6. Ordnung.

Lasse ich jetzt den Tangentialpunkt N mit x zusammenfallen, so daß x jetzt Wendepunkt wird ($f = 0$, $\Delta = 0$), so geht die Parameterdarstellung über in:

$$\varrho\,y_i = -4\,m_i + 4\,\wp\left(\frac{u}{3}\right) + n_i \sqrt{6\left\{\wp^3\left(\frac{u}{3}\right) - \frac{S}{2}\,\wp\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{T}{3}\right\}}.$$

Die 18 Punkte kann man geometrisch dann so definieren: Man geht von einem gegebenen Punkt als Steinerschem Punkt aus und sucht die 8 übrigen Steinerschen Punkte; verbindet man dann diese mit einem Wendepunkt, so erhält man 9 weitere Schnittpunkte, die mit den 9 Steinerschen Punkten gleiches $\varkappa$, λ besitzen.

Man kommt also zu dem Schlußresultat:

Anstatt des Strahlenbüschels von einem beliebigen Punkte N aus, hat man wie bei der Darstellung von Hermite das Kurvenbüschel

$$\varkappa\,\Delta^2 - 4\,\lambda\,\psi = 0.$$

Infolgedessen kommt immer achtzehn Punkten unserer C_3 das gleiche $\varkappa$, λ zu, und diese Punkte werden nur unterschieden, indem man setzt:

$$\varkappa = \wp \frac{u}{3}, \quad \lambda = 1.$$

Durch dieses Kurvenbüschel werden also sämtliche Steinerschen Punkte für $n = 3$ ausgeschnitten. Hat man einen solchen, so bestimme man $\varkappa$, λ so, daß die C_6 hindurchgeht. Diese schneidet die C_3 noch in 17 Punkten, von denen 8 die zum gegebenen zugehörigen Steinerschen Punkte sind. Die übrigen 9 sind die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden eines Steinerschen Punktes mit den 9 Wendepunkten der C_3, also ein 2. System von Steinerschen Punkten.

$n = 4$.

Nach der Theorie, die wir auf pag. 9 und 10 entwickelt haben, wird

$$\psi_4^2 = 0. \tag{18.}$$

Dies ist eine Gleichung für die 15 Strahlen, wenn wieder

$$\wp u = \frac{a_x^2 \, a_z}{a_x^2 \, a_z}$$

gesetzt wird, welche vom Tangentialpunkt ausgehen. Man muß jedoch beachten, daß $n = 4$ keine Primzahl, sondern durch 2 teilbar ist. Wir betrachten:

$$\frac{p\omega + q\omega'}{4}$$

und finden, daß 4 Paare vorhanden sind, für welche $p, q < n$ sind und mit n einen Faktor gemeinsam haben, nämlich

$$0{,}0; \quad 0{,}2; \quad 2{,}0 \quad \text{und} \quad 2{,}2 \quad \text{also}$$

$$0, \quad \frac{\omega,}{2} \quad \frac{\omega'}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Da der Parameter 0 dem Punkt x zukommt, der immer eine unbrauchbare Lösung ist, so bleiben nur die 3 anderen Punkte als uneigentliche Lösungen, und dies sind, wie wir gesehen haben, gerade die Punkte, welche für $n = 2$ Steinersche Punkte mit dem gegebenen Punkt x sind. Die 3 Strahlen, welche nach diesen 3 Punkten gehen, haben die Gleichung:

$$\psi_2^2 = \wp'^2 u = 0$$

und müssen von den 15 Strahlen ausgeschieden werden. Für die 12 gesuchten Punkte, die wirkliche Achtecke liefern, besteht also die Gleichung:

$$\frac{\psi_4^2}{\psi_2^2} = \frac{\wp'^2\left(\frac{1}{4}\wp''^3 + \wp'^4 - 3\,\wp\,\wp'^2\,\wp''\right)^2}{\wp'^2} = 0. \qquad (19.)$$

Für die eigentlichen Lösungen gilt also:

$$\frac{1}{4}\wp''^3 + \wp'^4 - 3\,\wp\,\wp'^2\,\wp'' = 0 \qquad (20.)$$

oder $$54\,G_{11}^3 + 16\,G_1^2 - 72\,G_1 \cdot G_{11} \cdot G_{111} = 0$$

nach der Bezeichnungsweise von pag. 13.

Es ist:

$$\frac{1}{4}\wp''^3 = 54\,\wp^6 - 27\,S\,\wp^4 + \frac{9}{2}S^2\wp^2 - \frac{S^3}{4},$$

$$\wp'^4 = 16\,\wp^6 + 4\,S^2\wp^2 + \frac{16}{9}T^2 - 16\,S\,\wp^4 + \frac{32}{3}T\,\wp^3 - \frac{16}{3}S\,T\,\wp,$$

$$-3\,\wp\,\wp'^2\,\wp'' = -72\,\wp^6 + 48\,S\,\wp^4 - 6\,S^2\wp^2 - 24\,T\,\wp^3 + 4\,S\,T\,\wp.$$

Die Gleichung 6. Grades (19.) lautet demnach:

$$2\,\wp^6 - 5\,S\,\wp^4 + \frac{40}{3}T\,\wp^3 - \frac{5}{2}S^2\wp^2 + \frac{4}{3}S\,T\,\wp - \frac{16}{9}T^2 + \frac{S^3}{4} = 0.$$

§ 3.

Ausführliche Bestimmung der in Clebsch-Lindemann pag. 657 und 658 gegebenen Formeln.

Das Problem der 9 Wendepunkte einer Kurve 3. Ordnung führt auf die Gleichung:

$$\wp\,3\,u = \wp\,u_0$$

oder $$\wp\,u - 4\,\wp'\,u^2 \cdot \frac{12\,\wp\,\wp'^2\,\wp'' - 4\,\wp'^4 - \wp''^3}{(12\,\wp\,\wp'^2 - \wp''^2)^2} = \frac{4\,\psi}{\Delta^2}. \qquad (1.)$$

Die Auflösung dieser Gleichung hängt nun von der Lösung der speziellen Dreiteilungs-Gleichung ab:

$$12\,\wp\,\wp'^2 - \wp''^2 = 0.$$

Jede der Wurzeln $\wp_i$ dieser letzteren Gleichung lieferte ein Wendepunktsdreiseit, nämlich:

$$\wp_i \cdot f - \Delta = 0.$$

Dieses Dreiseit wurde mit der Tangente in einem beliebigen Punkt x geschnitten, und war der Schnittpunkt

$$y = \Delta x + \varrho n,$$

so ergab sich für die 3 Schnittpunkte die Gleichung:

$$8\,\Omega\,\varrho^3 + 3\,\Delta\,(4\,\psi - \Delta^2\,\wp_i)\,\varrho^2 - 6\,\Delta^3 = 0. \tag{2.}$$

Mit Hilfe der Größen $\wp_i$ und $\varrho_i^{(h)}$ kann dann jede Wurzel $\wp u$ der Gleichung 9. Grades (1.) explizit angegeben werden.

Dies soll im folgenden geschehen.

Wir suchen also nach Clebsch-Lindemann den Schnittpunkt der 2 Geraden:

$$\begin{aligned}
&\wp_i\,(\Delta^2\,a_x^2 + 2\,\varrho_i^{(h)}\,\Delta\,a_x\,a_n + \varrho_i^{(h)\,2}\,a_n^2)\,a_y \\
&-(\Delta^2\,a_x^2 + 2\,\varrho_i^{(h)}\,\Delta\,a_x\,a_n + \varrho_i^{(h)2}\,a_n^2)\,a_y = 0. \\
&\wp_k\,(\Delta^2\,a_x^2 + 2\,\varrho_k^{(l)}\,\Delta\,a_x\,a_n + \varrho_k^{(l)2}\,a_n^2)\,a_y \\
&-(\Delta^2\,a_x^2 + 2\,\varrho_k^{(l)}\,\Delta\,a_x\,a_n + \varrho_k^{(l)2}\,a_n^2)\,a_y = 0.
\end{aligned} \tag{3.}$$

Setzt man noch:

$$\Delta^2 a_x^2 + 2\varrho_i^{(h)}\Delta a_x a_n + \varrho_i^{(h)2} a_n^2 = A, \quad \Delta^2 a_x^2 + 2\varrho_i^{(h)}\Delta a_x a_n + \varrho_i^{(h)2} a_n^2 = B,$$

$$\Delta^2 a_x^2 + 2\varrho_k^{(l)}\Delta a_x a_n + \varrho_k^{(l)2} a_n^2 = C, \quad \Delta^2 a_x^2 + 2\varrho_k^{(l)}\Delta a_x a_n + \varrho_k^{(l)2} a_n^2 = D,$$

so hat man:

$$\begin{aligned}
u_t = {} & A\cdot C\cdot(a\,a'\,u)\,\wp_i\,\wp_k - B\cdot C\,(a\,a'\,u)\,\wp_k \\
& - A\cdot D\,(a\,a'\,u)\,\wp_i + B\cdot D\,(a\,a'\,u).
\end{aligned} \tag{4.}$$

Aus diesen Koordinaten t_i findet man dann eine Wurzel der Gleichung (1.) mittels der Substitution:

$$\wp u = \frac{a_x^2\,a_t}{a_x^2\,a_t}, \tag{5.}$$

also (6.)

$$\wp u = \frac{a_x''^2[A\cdot C\wp_i\wp_k(a\,a'\,a'') - B\cdot C\wp_k(a\,a'\,a'') - A\cdot D\wp_i(a\,a'\,a'') + B\cdot D(a\,a'\,a'')]}{a_x''^2[A\cdot C\wp_i\wp_k(a\,a'\,a'') - B\cdot C\wp_k(a\,a'\,a'') - A\cdot D\wp_i(a\,a'\,a'') + B\cdot D(a\,a'\,a'')]}.$$

Zähler und Nenner in dem rechtsstehenden Ausdrucke werden dabei ganze rationale Funktionen zweier Wurzeln von der speziellen Dreiteilungsgleichung und zweier Wurzeln der beiden zugehörigen

Gleichungen (2.); die Koeffizienten dieser Wurzeln erscheinen nach pag. 23 (3.) dieser Arbeit als Kovarianten 18. Ordnung von f, geschrieben in den Koordinaten des festen Punktes x und lassen sich daher sämtlich durch Δ, ψ und Ω ausdrücken.

Die zu berechnenden Kovarianten sind folgende, wenn wir die u_i noch beibehalten:

1)	$a_x^2 a_x'^2 (a a' u)$	10)	$a_x^2 a_x'^2 (a a' u)$
2)	$a_x a_n a_x'^2 (a a' u)$	11)	$a_x a_n a_x'^2 (a a' u)$
3)	$a_n^2 a_x'^2 (a a' u)$	12)	$a_n^2 a_x'^2 (a a' u)$
4)	$a_x^2 a_x' a_n' (a a' u)$	13)	$a_x^2 a_x' a_n' (a a' u)$
5)	$a_x a_n a_x' a_n' (a a' u)$	14)	$a_x a_n a_x' a_n' (a a' u)$
6)	$a_n^2 a_x' a_n' (a a' u)$	15)	$a_n^2 a_x' a_n' (a a' u)$
7)	$a_x^2 a_n'^2 (a a' u)$	16)	$a_x^2 a_n'^2 (a a' u)$
8)	$a_x a_n a_n'^2 (a a' u)$	17)	$a_x a_n a_n'^2 (a a' u)$
9)	$a_n^2 a_n'^2 (a a' u)$	18)	$a_n^2 a_n'^2 (a a' u)$

19)	$a_x^2 a_x^2 (a a u)$
20)	$a_x a_n a_x^2 (a a u)$
21)	$a_n^2 a_x^2 (a a u)$
22)	$a_x^2 a_x a_n (a a u)$
23)	$a_x a_n a_x a_n (a a u)$
24)	$a_n^2 a_x a_n (a a u)$
25)	$a_x^2 a_n^2 (a a u)$
26)	$a_x a_n a_n^2 (a a u)$
27)	$a_n^2 a_n^2 (a a u)$

Bevor wir zur eigentlichen Ausrechnung der Kovarianten gehen, wollen wir noch einige Formeln ableiten, die wir dabei nötig haben.

I. $a_n^2 a_y$.

Die Tangente im Tangentialpunkt $N = N_x^4 u_n$ der Kurve 3. Ordnung hat die Gleichung:

$$a_y a_n^2 = a_y a_n a_{n'} N_x^4 N_x^{4'} = 0. \tag{7.}$$

Diese Tangente ist ein Strahl des Büschels

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_y}{a_x^2 a_y},$$

den ich durch den speziellen Wert $u = u_0$ bis auf einen Faktor C bestimme (wobei $a_x^3 = 0$ gilt):

$$a_y a_n^2 = (a_x^2 a_y - \wp a_x^2 a_y) \cdot C$$

und da

$$\wp u_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2},$$

so wird

$$a_y a_n^2 = \left[a_x^2 a_y - \frac{4\psi}{\Delta^2} \cdot a_x^2 a_y\right] \cdot C.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung haben wir einen Ausdruck in 9 Symbolen, 1. Grades in y und 8. Grades in x, auf der rechten bloß 3 Symbole, 1. Grades in y und zweiten in x, der Faktor C muß also 6 Symbole haben und 6. Grades in x sein; dies leistet aber nur Δ^2.

Es wird jetzt:

$$a_y a_n^2 = c_1 \left[\Delta^2 a_x^2 a_y - 4\psi a_x^2 a_y\right].$$

Diesen Zahlenfaktor c_1 bestimmen wir durch den speziellen Wert

$$y = x.$$

Dann wird

$$a_x a_n^2 = c_1 \cdot \Delta^3 = -\frac{1}{6}\Delta^3 \qquad \text{(C.-L. p. 635.)}$$

also

$$c_1 = -\frac{1}{6}$$

und

$$a_y a_n^2 = \frac{2}{3}\psi a_x^2 a_y - \frac{1}{6}\Delta^2 a_x^2 a_y \quad (\text{mod. } f) \qquad (8.)$$

II. $a_y \alpha_n^2$.

Um diese Form zu bilden, wenden wir den δ-Prozeß an, müssen jedoch bemerken, daß obige Formel für $a_y a_n^2$ nur gilt, wenn $a_x^3 = 0$, während sonst noch ein Ausdruck 8. Grades in x mit 9 Symbolen und 1. Grades in y hinzutritt; dies leistet nur, wie man sich nach dem vollständigen System[1]) leicht überzeugt:

$$f \cdot \psi_x^5 \psi_y.$$

[1]) Math. Annalen Bd. 1: Gordan, „Über ternäre Formen 3. Grades“.

Nach dem δ-Prozeß wird jetzt:

$$a_y a_n^2 = \frac{2}{3}\psi a_x^2 a_y - \frac{1}{12}\Delta^2 S a_x^2 a_y + c_2 \cdot \Delta \psi_x^5 \psi_y.$$

Zur Bestimmung des Zahlenfaktors c_2 nimmt man wieder:

$$y_i = x_i$$

$$a_x a_n^2 = \frac{2}{3}\psi\Delta + c_2\Delta\psi = -\frac{2}{3}\Delta\psi; \quad \text{(C.-L. p. 635 (16.))}$$

also wird

$$c_2 = -\frac{4}{3}$$

$$a_y a_n^2 = \frac{2}{3}\psi a_x^2 a_y - \frac{1}{12}\Delta^2 S a_x^2 a_y - \frac{4}{3}\Delta\psi_x^5\psi_y. \qquad (9.)$$

III. $a_l a_n^2$ und $a_l a_n^2$.

Setzt man in den Gleichungen für $a_y a_n^2$ und $a_y a_n^2$

$$y_i = l_i,$$

so erhält man:

$$a_l a_n^2 = \frac{2}{3}\psi a_x^2 a_l - \frac{1}{6}\Delta^2 a_x^2 a_l$$

$$a_l a_n^2 = \frac{2}{3}\psi a_x^2 a_l - \frac{1}{12}\Delta^2 S a_x^2 a_l - \frac{4}{3}\Delta\psi_x^5\psi_l.$$

Es ist ferner:

$$a_x^2 a_l = -\psi \quad \text{und} \quad a_x^2 a_l = \frac{1}{4}\Delta^2 \qquad \text{(C.-L. p. 635.)}$$

$$\psi_x^5 \psi_l = -\frac{S\Delta^3}{48}. \qquad \text{(C.-L. p. 640.)}$$

Dies eingesetzt giebt:

$$a_l a_n^2 = \frac{1}{3}\psi\Delta^2 \qquad (10.)$$

$$a_l a_n^2 = -\frac{2}{3}\psi^2 + \frac{1}{144} S\Delta^4. \qquad (11.)$$

IV. $a_m a_n^2$ und $\alpha_m \alpha_n^2$.

Diese Ausdrücke findet man wie die vorhergehenden durch Substitution von:

$$y_i = m_i$$

in den Gleichungen (8.) und (9.), wenn man noch bemerkt, daß

$$a_x^2 a_m = \psi, \quad \alpha_x^2 a_m = -\frac{1}{24} S\Delta^2$$

$$\psi_x^5 \psi_m = -\frac{1}{48} T\Delta^3. \quad \text{(C.-L. p. 635 u. 640.)}$$

Dann ist:

$$a_m a_n^2 = \frac{2}{3}\psi^2 + \frac{1}{144} S\Delta^4 \qquad (12.)$$

$$\alpha_m \alpha_n^2 = -\frac{1}{9} S\psi\Delta^2 + \frac{1}{36} T\Delta^4. \qquad (13.)$$

Ferner kommen noch zur Anwendung:

$$a_n a_x a_y = -\frac{2}{3}(l\,x\,y) \quad \text{(C.-L. p. 639.)} \quad (14.)$$

$$\alpha_n \alpha_x \alpha_y = -\frac{2}{3}(m\,x\,y) \quad (\delta\text{-Prozeß.}) \quad (15.)$$

$$a_x a_m a_n = \Omega \quad \text{(C.-L. p. 639.)} \quad (16.)$$

Nachdem wir nun die nötigen Formeln abgeleitet haben, wollen wir zur Berechnung der auf pag. 25 aufgestellten Kovarianten schreiten. Wie man sofort sieht, verschwinden identisch die Kovarianten

1, 5, 9 und 10, 14, 18;

ferner ist bis auf das Vorzeichen gleich:

Kovariante 2 und 4, 3 und 7, 6 und 8
„ 11 und 13, 12 und 16, 15 und 17.

Von den andern wollen wir nur zwei ausführlich darstellen, nämlich:

ad 6.

Es ist nach pag. 28 (14):

$$a_x a_n a_y = -\frac{2}{3}(l\,x\,y), \quad \text{also} \quad a_x a_n a_i = -\frac{2}{3}(\overset{\wedge}{l\,x})_i,$$

so daß wird:

$$a_n^2 a_x' a_n' (a a' u) = -\frac{2}{3} a_n^2 (a \hat{l} x u) = \frac{2}{3} a_n^2 (a u \hat{l} x)$$

$$= \frac{2}{3} a_n^2 (a_l u_x - u_l a_x)$$

$$= \frac{2}{9} \psi \Delta^2 u_x + \frac{1}{9} \Delta^3 u_l .$$

ad 12.

Durch Benützung der Formel (9.) auf pag. 26 erhält man:

$$a_n^2 a_x'^2 (a a' u) = \frac{2}{3} a_x'^2 a_x^2 \psi (a a' u) - \frac{1}{12} S \Delta^2 a_x^2 a_x'^2 (a a' u) - \frac{4}{3} \Delta \psi_x^5 a_x'^2 (\psi a' u)$$

$$= -\frac{1}{12} \Delta^2 S \cdot N - \frac{4}{3} \Delta \psi_x^5 a_x^2 (\psi a u).$$

Setzt man $u_i = a_x^2 a_i$ bezw. $a_x^2 a_i$, um die entsprechenden Zähler- und Nennerkovarianten zu erhalten, so wird hier:

$$a_n^2 a_x'^2 \beta_x^2 (a a' \beta) = 0,$$

$$a_n^2 a_x'^2 a_x^2 (a a' a) = -\frac{4}{3} \Delta \psi_x^5 a_x^2 a_x^2 (\psi a a) - \frac{1}{12} S \Delta^2 a_x^2 b_x^2 a_x'^2 (a a b).$$

Es ist $(a a u') a_x^2 a_x^2 = N_x^4 u_n'$ und nimmt man:

$$u_i' = \psi_x^5 \psi_i,$$

so wird:

$$(a a \psi) a_x^2 a_x^2 \psi_x^5 = N_x^4 \psi_n \psi_x^5 = \Omega.$$

Durch Einsetzen in $a_n^2 a_x'^2 a_x^2 (a a' a)$ erhält man folglich, da das 2. Glied bei Vertauschung von a und b sein Zeichen ändert, also identisch verschwindet:

$$a_n^2 a_x'^2 a_x^2 (a a' a) = \frac{4}{3} \Delta \Omega.$$

Genau wie wir diese Kovarianten behandelt haben, kann man es bei den andern machen; alle lassen sich durch Δ, ψ und Ω ausdrücken, wie in folgender Tabelle auf der nächsten Seite gezeigt wird. In dieser sind auf der 1. Kolonne noch die u_i beibehalten, während in der 2. und 3. Kolonne $u_i = a_x^2 a_i$ bezw. $a_x^2 a_i$ gesetzt ist.

Tabelle.

1.	0	0	0
2.	$-\frac{1}{6}\Delta^2 u_x$	0	$-\frac{1}{6}\Delta^3$
3.	$\frac{\Delta^2}{6}N$	0	0
4.	$\frac{1}{6}\Delta^2 u_x$	0	$\frac{1}{6}\Delta^3$
5.	0	0	0
6.	$\frac{2}{9}\psi\Delta^2 u_x+\frac{1}{9}\Delta^3 u_l$	$\frac{1}{36}\Delta^5$	$\frac{1}{9}\Delta^3\psi$
7.	$-\frac{\Delta^2}{6}N$	0	0
8.	$-\frac{2}{9}\psi\Delta^2 u_x-\frac{1}{9}\Delta^3 u_l$	$-\frac{1}{36}\Delta^5$	$-\frac{1}{9}\Delta^3\psi$
9.	0	0	0
10.	0	0	0
11.	$\frac{2}{3}\Delta u_m+\frac{1}{36}S\Delta^2 u_x$	$\frac{2}{3}\Delta\psi$	0
12.	$-\frac{4}{3}\Delta\psi_x^5 a_x^2(\psi\alpha u)-\frac{S}{12}\Delta^2 N$	$\frac{4}{3}\Delta\Omega$	0
13.	$-11.$	$-\frac{2}{3}\Delta\psi$	0
14.	0	0	0
15.	$-\frac{2}{27}S\psi\Delta^2 u_x+\frac{1}{54}T\Delta^4 u_x+\frac{4}{9}\Delta\psi u_m$	$\frac{4}{9}\Delta\psi^2$	$-\frac{5}{54}S\psi\Delta^3+\frac{1}{54}T\Delta^5$
16.	$-12.$	$-\frac{4}{3}\Delta\Omega$	0
17.	$-15.$	$-\frac{4}{9}\Delta\psi^2$	$-15.$
18.	0	0	0

19.	N	0	0
20.	$\frac{2}{3}\Delta L + \frac{2}{3}\psi u_x$	$\frac{1}{6}\Delta^3$	0
21.	$\frac{2}{3}\psi N$	0	0
22.	$\frac{2}{3}\psi u_x$	0	$\frac{2}{3}\psi\Delta$
23.	$\frac{2}{3}\Omega u_x$	0	$\frac{2}{3}\Omega\Delta$
24.	$\frac{4}{9}\psi^2 u_x + \frac{1}{3\cdot 72}S\Delta^4 u_x + \frac{1}{9}\Delta^3 u_m$	$\frac{1}{9}\psi\Delta^3$	$\frac{4}{9}\psi^2\Delta$
25.	$\frac{4}{3}\Delta a_x^2\psi_x^5(\psi a u) + \frac{2}{3}\psi N$	0	$\frac{4}{3}\Omega\Delta$
26.	$-\frac{4}{9}\Delta\psi u_l + \frac{4}{9}\psi^2 u_x - \frac{1}{3\cdot 72}S\Delta^4 u_x$	$-\frac{1}{9}\psi\Delta^3$	$\frac{8}{9}\Delta\psi^2 - \frac{1}{3\cdot 72}S\Delta^5$
27.	$\left(\frac{4}{9}\psi^2 - \frac{\Delta^4 S}{72}\right)N + \frac{8}{9}\Delta\psi\cdot\psi_x^5 a_x^2(\psi a u) - \frac{2}{9}\Delta^3(\psi a u)a_x^2\psi_x^5$	$\frac{2}{9}\Delta^3\Omega$	$\frac{8}{9}\psi\Delta\Omega.$

II. Teil.

Auflösung von Gleichungen, die das Resultat von Eliminationsaufgaben sind.

Durch das Abelsche Theorem wird die Bedingung für einen Wendepunkt in der Form erhalten:

$$\wp 3u = \wp u_0.$$

Durch Anwendung der Kiepertschen Formeln wird die Gleichung 80 in C.-L. pag. 655 erhalten. Diese Gleichung kann nun, wie dort gezeigt ist, an der Hand geometrischer Überlegungen aufgelöst werden, und in den Seiten 24—30 dieser Arbeit wurde eine Wurzel dieser Gleichung explizit dargestellt.

Eine solche Überlegung führt auch bei andern geometrischen Aufgaben zum Ziele. Frägt man nämlich nach den Punkten, in denen eine Berührung von gewisser Ordnung von Kurven mit unserer Grundkurve stattfinden soll, so kann man einen solchen Punkt entweder durch das Abelsche Theorem oder durch geometrische Konstruktion finden. Dies soll im Folgenden bei Kegelschnitten geschehen, welche mit einer Kurve 3. Ordnung eine Berührung von gewisser Ordnung haben.

Das Argument des gesuchten Punktes, in dem die Berührung stattfinden soll, sei u und der Einfachheit halber werde der gegebene feste Punkt, durch welchen der Kegelschnitt sonst noch geht, in den Anfangspunkt x des Koordinatensystems verlegt. Nach dem Abelschen Theorem erhält man dann unter gleichzeitiger Anwendung der Kiepertschen Formeln für $\wp u$ eine Gleichung, deren Grad in $\wp u$ von der Ordnung der Berührung abhängt; und diese Gleichung ist das Resultat der Elimination der y_i, dy_i, d^2y_i . . . . . ., wo y_i die Koordinaten des Punktes u sein sollen, aus den Gleichungen:

$$a_y^3 = 0, \quad \wp u \cdot a_x^2 a_y - a_x^2 a_y = 0,$$

der Gleichung, welche aussagt, daß x mit y und den zu y benachbarten Punkten auf einem Kegelschnitt liegt, und den Gleichungen, welche die Bedingung für eine Berührung darstellen. Wird nun in der Gleichung für $\wp u$

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_y}{a_x^2 a_y}$$

gesetzt, so erhält man eine Kurve, deren Ordnung der Grad dieser Gleichung ist, und welche in die Verbindungslinien des Tangentialpunktes des beliebig gewählten aber festen Punktes x mit den gesuchten Berührungspunkten zerfällt. Setzt man aber:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_t}{a_x^2 a_t},$$

wo die t_i die Koordinaten des auf Grund geometrischer Konstruktion gefundenen Punktes bedeuten, so ist $\wp u = \frac{a_x^2 a_t}{a_x^2 a_t}$ eine Wurzel obiger Eliminationsgleichung mit der Unbekannten $\wp u$.

§ 1.

Ein Kegelschnitt soll mit der Kurve 3. Ordnung eine Berührung 5. Ordnung haben, d. h. es sollen die 6 Schnittpunkte einer C_2 mit einer C_3 in einem Punkte zusammenfallen.

Man hat sofort:

$$6u + 2u_0 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'} \tag{1.}$$

$$\text{und} \quad \wp 6u = \wp 2u_0$$

und nach Anwendung der Kiepertschen Formeln:

$$\wp u - \frac{\psi_5(u) \cdot \psi_7(u)}{\psi_6^2 \cdot (u)} = \wp_0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{12 \wp_0 \wp_0'^2 - \wp_0''^2}{\wp_0'^2} \tag{2.}$$

$$= -\frac{8\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\psi^2 - S\Delta^4)^2}{1536\,\Omega^2 \Delta^2}. \tag{3.}$$

Diese Gleichung in $\wp u$ vom 36. Grade soll aufgelöst werden. Aus Gleichung (1.) folgt:

$$u = -\frac{u_0}{3} + \frac{p\omega + q\omega'}{6}$$

und an dieser Form erkennt man bereits, daß unter den 36 gesuchten Punkten sich die 9 Wendepunkte befinden; diese liefern uneigentliche Lösungen, indem die Kegelschnitte in diesem Fall die Wendetangenten[1]) sind, jede doppelt zählend. Die 27 andern sind wie bekannt die Berührungspunkte der Tangenten, die von einem Wendepunkte an die C_3 gezogen werden.

Sind c_i die Koordinaten eines Wendepunktes, so ist das Produkt der Gleichung der 3 Tangenten, welche von diesem Wendepunkte an die C_3 gezogen werden können:

$$(a_y a_c^2)^3 - \frac{S}{2} \cdot (a_y a_c^2) \cdot (a_y a_c^2)^2 + \frac{T}{3} (a_y a_c^2)^3 = 0.^2) \qquad (4.)$$

Um nun die Gleichung einer einzigen Tangente zu erhalten, zerlegt man obige Gleichung in ihre 3 linearen Faktoren. Hiezu kann man wie bei den Wendepunktsdreiseiten auf pag. 23 dieser Arbeit die in C.-L. p. 597 angegebene Methode anwenden. Wir schneiden demnach die Gleichung (4.), geometrisch als eine C_3 aufgefaßt, mit einer Geraden und wählen hiezu wieder die Tangente in dem Anfangspunkt unseres Koordinatensystems. Wir setzen also in Gleichung (4.):

$$y_k = \Delta x_k + \varrho n_k$$

und bilden die Gleichung 3. Grades für ϱ:

$$\begin{aligned}[(\Delta a_x + \varrho a_n) a_c^2]^3 - \frac{S}{2} [(\Delta a_x + \varrho a_n) a_c^2] \cdot [(\Delta a_x + \varrho a_n) a_c^2]^2 \\ + \frac{T}{3} [(\Delta a_x + \varrho a_n) a_c^2]^3 = 0. \end{aligned} \qquad (5.)$$

Sind $\varrho^{(1)}$, $\varrho^{(2)}$, $\varrho^{(3)}$ die Wurzeln dieser Gleichung und setzt man in der Gleichung der Tangente der C_3 (4.) im Punkte z:

$$2 (a_y a_c^2)(b_z b_c^2) \{T (b_z b_c^2) - S (a_z a_c^2)\} + (a_y a_c^2) \{6 (\beta_z \beta_c^2)^2 - S (a_z a_c^2)^2\} = 0$$

$$z = \Delta x + \varrho^{(h)} n \qquad h = 1, 2, 3,$$

so lautet die Gleichung einer Tangente, welche vom Wendepunkte c an unsere Grundkurve geht:

$$A \cdot (a_y a_c^2) + B \cdot (a_y a_c^2) = 0, \qquad (6.)$$

[1]) Clebsch-Lindemann p. 535. [2]) Clebsch-Lindemann p. 773.

wo

$$A = 2\left[(\Delta b_x + \varrho^{(h)} b_n) b_c^2\right] \cdot \left\{T\left[(\Delta b_x + \varrho^{(h)} b_n) b_c^2\right] - S\left[(\Delta a_x + \varrho^{(h)} a_n) a_c^2\right]\right\},$$

$$B = 6\left[(\Delta \beta_x + \varrho^{(h)} \beta_n) \beta_c^2\right]^2 - S\left[(\Delta a_x + \varrho^{(h)} a_n) a_c^2\right]^2.$$

Der Berührungspunkt dieser Tangente mit der C_3 liegt nun mit den beiden andern Berührungspunkten der übrigen 3 Tangenten, welche noch vom Wendepunkte ausgehen, auf der harmonischen Polaren des Wendepunktes, indem der Polarkegelschnitt eines Wendepunktes c

$$a_y^2 a_c = 0$$

in diese Gerade und in die Wendetangente zerfällt. Zur Bestimmung dieser zwei Faktoren schneiden wir diesen Polar C_2 auch mit der Tangente in x. Die Gleichung 2. Grades für λ, wenn $y = \Delta x + \lambda n$ in der Gleichung $a_y^2 a_c = 0$ gesetzt wird, lautet:

$$a_c(\Delta^2 a_x^2 + 2\Delta\lambda a_x a_n + \lambda^2 a_n^2) = 0 \qquad (7.)$$

und setzt man in der Gleichung $a_y a_c a_s = 0$

$$s = \Delta x + \lambda^{(l)} n \qquad l = 1, 2,$$

so erhält man die Gerade:

$$\Delta a_x a_c a_y + \lambda^{(l)} a_c a_y a_n = 0. \qquad (8.)$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden (6.) und (8.) erscheint in der Form:

$$u_t = A \cdot a_c^2 a_c'(a a' u)\left[\Delta a_x' + \lambda^{(l)} a_n'\right] + B \cdot a_c^2 a_c'(a a' u)\left[\Delta a_x' + \lambda^{(l)} a_n'\right].$$

Setzt man hier der Reihe nach $\varrho = 1, 2, 3$; $\lambda = 1, 2$, so erhält man die 3 gesuchten Berührungspunkte als Schnitt der harmonischen Polaren mit den Tangenten (4.), aber nur einen Schnittpunkt durch die Wendetangente, den Wendepunkt c.

Eine Wurzel der Gleichung (3.) kann demnach in der Form dargestellt werden:

$$\varrho u = \frac{a_x''^2 a_t''}{a_x''^2 a_t''}$$

$$= \frac{a_x''^2\left\{A \cdot a_c^2 a_c'(a a' a'')\left[\Delta a_x' + \lambda^{(l)} a_n'\right] + B \cdot a_c^2 a_c'(a a' a'')\left[\Delta a_x' + \lambda^{(l)} a_n'\right]\right\}}{a_x''^2\left\{A \cdot a_c^2 a_c'(a a' a'')\left[\Delta a_x' + \lambda^{(l)} a_n'\right] + B \cdot a_c^2 a_c'(a a' a'')\left[\Delta a_x' + \lambda^{(l)} a_n'\right]\right\}} \qquad (9.)$$

und alle Wurzeln werden erhalten, wenn nacheinander alle

9 Wendepunkte in vorangehender Rechnung benutzt werden. Die in dem Quotienten (9.) auftretenden Kovarianten sind alle in den Koordinaten des festen Punktes x geschrieben und lassen sich durch Δ, ψ und Ω ausdrücken, da ja, wie auf pag. 30 gezeigt ist, die $a_x^2 a_c$ und hiemit auch die $a_x a_c^2$ berechnet werden können.

Was die Kovarianten $a_x a_n a_c$ und $a_c a_n^2$ in der Gleichung (7.) anbetrifft, so mögen diese hier explizit aufgestellt werden. Durch Substitution von $u_i = a_x a_n a_i$ und $u_i = a_n^2 a_i$ in den Ausdrücken der 1. Kolonne auf pag. 30 und durch Benützung der Formeln

$$a_x a_m a_n = \Omega, \quad a_x a_n a_l = 0 \text{ wird}$$

I. $a_x a_n a_c$:

1.	0	10.	0	19.	$-\frac{1}{6}\Delta^3$
2.	0	11.	$\frac{2}{3}\Delta\Omega$	20.	0
3.	$-\frac{1}{36}\Delta^5$	12.	$-\frac{S\Delta^5}{216}+\frac{8}{9}\Delta\psi^2$	21.	$-\frac{1}{9}\psi\Delta^3$
4.	0	13.	—11.	22.	0
5.	0	14.	0	23.	0
6.	0	15.	$\frac{4}{9}\Delta\psi\Omega$	24.	$\frac{1}{9}\Delta^3\Omega$
7.	$\frac{1}{36}\Delta^5$	16.	—12.	25.	$\frac{1}{0}\Delta^3\psi$
8.	0	17.	—15.	26.	0
9.	0	18.	0	27.	$\frac{2}{9}\psi^2\Delta^3-\frac{\Delta^7 S}{36^2}$

II. $a_n^2 a_c$:

1.	0	5.	0	9.	0
2.	$\frac{1}{36}\Delta^5$	6.	0	10.	0
3.	0	7.	0	11.	$\frac{4}{9}\Delta\psi^2$
4.	$-\frac{1}{36}\Delta^5$	8.	0	12.	$\frac{8}{9}\Delta\psi\Omega$

13. $-11.$ 18. 0 23. $-\frac{1}{9}\Delta^3\Omega$

14. 0 19. 0 24. 0

15. $-\frac{1}{324}T\Delta^7+\frac{8}{27}\Delta\psi^3+\frac{5}{324}S\psi\Delta^5$ 20. $\frac{1}{9}\Delta^3\psi$ 25. $-\frac{2}{9}\Delta^3\Omega$

16. $-12.$ 21. 0 26. $-\frac{2}{9}\psi^2\Delta^3+\frac{1}{36^2}S\Delta^7$

17. $-15.$ 22. $-\frac{1}{9}\psi\Delta^3$ 27. 0

§ 2.

Ein Kegelschnitt soll in einem gegebenen Punkt v eine Berührung 4. Ordnung haben; gesucht der 6. Schnittpunkt u mit der Grundkurve.

Man erhält:

$$u + 5v + 2u_0 \equiv 0$$

und wenn man der Einfachheit halber den festen Punkt v mit dem Punkt x zusammenfallen läßt:

$$u + 2u_0 \equiv 0$$

$$\wp u = \wp 2u_0 = -\frac{8\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\psi^2 - S\Delta^4)^2}{1536\,\Delta^2\Omega^2}. \qquad (1.)$$

Geometrisch ist der gesuchte Punkt mit den Koordinaten t_i der 3. Schnittpunkt der Kurve mit der geraden Verbindungslinie des Punktes x mit seinem 2. Tangentialpunkt.[1])

Sind ξ_i die Koordinaten des 2. Tangentialpunktes, so erscheint diese Verbindungslinie in der Form

$$x_i + \lambda\,\xi_i$$

und man braucht nur $y_i = x_i + \lambda\,\xi_i$ in $a_y^3 = 0$ zu setzen, um eine kubische Gleichung für λ zu erhalten, die sich, weil zwei Punkte auf der C_3: $a_y^3 = 0$ liegen, sofort auf eine lineare reduziert:

$$a_x^2 a_\xi + \lambda\, a_x a_\xi^2 = 0$$

[1]) Salmon-Fiedler, Höhere ebene Kurven p. 173.

und hieraus

$$\lambda = -\frac{a_x^2 a_\xi}{a_x a_\xi^2}.$$

Der 3. Schnittpunkt erscheint also in der Form:

$$t_i = x_i - \frac{a_x^2 a_\xi}{a_x a_\xi^2} \cdot \xi_i.$$

Setzt man:

$$\wp u = \frac{a_x'^2 a_t'}{a_x'^2 a_t'} = \frac{\Delta - \frac{a_x^2 a_\xi}{a_x a_\xi^2} \cdot a_x'^2 a_\xi'}{-\frac{a_x^2 a_\xi}{a_x a_\xi^2} \cdot a_x'^2 a_\xi'}, \qquad (2.)$$

so müssen die Gleichungen (1.) und (2.) übereinstimmen.

Um dies zu zeigen, berechnen wir die rechte Seite der Gleichung (2.), und zwar wollen wir, um die Gleichung des 2. Tangentialpunktes $u_\xi = 0$ aufzustellen, von der typischen Form von $H(y)$ ausgehen. Der 2. Tangentialpunkt erscheint dann als Schnitt der beiden Geraden:

$$\frac{3}{2}\Omega\eta + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right)\zeta = 0$$

$$\xi = 0,$$

und wenn wir für ξ, η, ζ die Werte einsetzen:

$$\xi = 4(y\,n\,k), \quad \eta = 4(x\,y\,k), \quad \zeta = 4(x\,n\,y), \quad \text{(C.-L. p. 644.)}$$

so erhalten wir:

$$\frac{3}{2}\Omega(x\,y\,k) + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right)(x\,n\,y) = 0$$

$$(y\,n\,k) = 0.$$

Der Schnittpunkt dieser zwei Geraden wird jetzt:

$$u_\xi = -\frac{3}{2}\Omega(\hat{x}k\ \hat{n}k\,u) + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right)(\hat{x}n\ \hat{n}k\,u)$$

$$= \frac{3}{2}\Omega u_k + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right)u_n$$

$$= c\,u_k + d\,u_n,$$

wenn:

$$c = \frac{3}{2}\Omega, \quad d = \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right).$$

Nun bildet man die Größen $a_x^2 a_\xi$ und $a_x a_\xi^2$, indem man die Formeln anwendet:

$$a_k^2 a_x = \frac{3}{4}\psi\Delta^3, \quad a_k a_n a_x = 0, \qquad \text{(C.-L. p. 641.)}$$

und erhält:

$$b_x b_\xi^2 = b_x b_{ck+dn}^2$$

$$= \frac{27}{16}\psi\Delta^3\Omega^2 - \frac{27}{32}\psi^4\Delta^3 - \frac{3}{32^3}S^2\Delta^{11} + \frac{9}{16\cdot 32}S\Delta^7\psi;$$

$$a_x^2 a_\xi = \frac{3}{2}\Omega a_x^2 a_k = \frac{3}{8}\Delta^3\Omega$$

$$\alpha_x^2 a_\xi = \frac{3}{2}\Omega a_x^2 a_k = \frac{3}{2}\psi\Delta\Omega.$$

Durch Einsetzen aller dieser Werte in Gleichung (2.) wird nun:

$$\wp u = \frac{\Delta a_x a_\xi^2 - a_x^2 a_\xi \cdot \alpha_x^2 a_\xi}{-(a_x^2 a_\xi)^2}$$

$$= \frac{\frac{27}{16}\psi\Delta^4\Omega^2 - \frac{27}{32}\psi^4\Delta^4 - \frac{3}{32^3}S^2\Delta^{12} + \frac{9}{16\cdot 32}S\Delta^8\psi - \frac{9}{16}\psi\Delta^4\Omega^2}{-\frac{9}{64}\Delta^6\Omega^2}$$

$$= -\frac{8\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\psi^2 - S\Delta^4)^2}{1536\,\Delta^2\Omega^2}.$$

§ 3.

Der Kegelschnitt soll die C_3 im Punkte x berühren und in einem andern Punkt u mit der C_3 eine Berührung 3. Ordnung haben.

Es ist:

$$4u + 2u_0 \equiv 0$$

$$\wp 4u = \wp 2u_0. \qquad (1.)$$

Konstruktiv erhält man die gesuchten Punkte, wenn man vom ersten Tangentialpunkt x aus die 4 Tangenten an die C_3 konstruiert und von jedem Berührungspunkte aus wieder 4 Tangenten

zieht. Letztere Berührungspunkte sind dann die Punkte, in welchen der Kegelschnitt die Grundkurve berührt.

Die Gleichung der 3 Tangenten, welche vom Punkt N als dem 1. Tangentialpunkt an die C_3 gehen, wenn man von der Tangente in x absieht, hat die Form:

$$(a_x^2 a_y)^3 - \frac{S}{2}(a_x^2 a_y)(a_x^2 a_y)^2 + \frac{T}{3}(a_x^2 a_y)^3 = 0. \qquad (2.)$$

Diese Gleichung wollen wir wieder in ihre Faktoren zerlegen, und zu diesem Zwecke schneiden wir die durch Gleichung (2.) dargestellte Kurve 3. Ordnung mit der Geraden:

$$y_i = \Delta^5 x_i + \varrho s_i, \qquad (3.)$$

wobei s_i die Koordinaten eines Wendepunktes sein sollen, und wo die Koordinaten s_i nach Clebsch-Lindemann p. 658 in Funktion von p_i, p_k, $\varrho_i^{(h)}$, $\varrho_k^{(l)}$ erscheinen, deren Koeffizienten Kovarianten 16. Ordnung von f sind, geschrieben in den Koordinaten des festen Punktes x.[1])

Zur Bestimmung von ϱ erhält man durch Einsetzen von $y = \Delta^5 x + \varrho s$ in Gleichung (2.) eine kubische Gleichung:

$$(\Delta^6 + \varrho a_x^2 a_s)^3 - \frac{S}{2}(\Delta^6 + \varrho a_x^2 a_s)(\varrho a_x^2 a_s)^2 + \frac{T}{3}(\varrho a_x^2 a_s)^3 = 0 \quad (4.)$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$\varrho^3\left[(a_x^2 a_s)^3 - \frac{S}{2}(a_x^2 a_s)(a_x^2 a_s)^2 + \frac{T}{3}(a_x^2 a_s)^3\right] + \varrho^2\left[3\Delta^6(a_x^2 a_s)^2 - \frac{S}{2}\Delta^6(a_x^2 a_s)^2\right] + 3\varrho\Delta^{12}(a_x^2 a_s) + \Delta^{18} = 0.$$

Nun kann man eine Tangente leicht aufstellen, indem man in der Gleichung der Tangente im Punkte z inbezug auf die C_3 (2.) setzt:

$$z = \Delta^5 x_i + \varrho^{(h)} s_i, \qquad h = 1, 2, 3$$

und erhält:

$$6(a_x^2 a_y)(a_x^2 a_z)^2 - 2S(a_x^2 a_z)(a_x^2 a_z)(a_x^2 a_y) - S(a_x^2 a_y)(a_x^2 a_z)^2 + 2T(a_x^2 a_z)^2(a_x^2 a_y) = 0, \qquad (5.)$$

wenn die z_i obige Bedeutung haben.

---

[1]) Cf. p. 25 und 30 dieser Arbeit.

Es handelt sich nun darum, den Berührungspunkt dieser letzteren Tangente mit der Grundkurve $a_y^3 = 0$ aufzufinden. Hiezu benützen wir den Polar C_2 des Punktes N inbezug auf $f = 0$, also

$$a_y^2 a_n = 0. \tag{6.}$$

Der Schnittpunkt der Tangente (5.) mit diesem Polar C_2 ist dann bekanntlich der verlangte Berührungspunkt. Zu diesem Zwecke legen wir auf der Tangente vom Punkte N aus noch einen 2. Punkt fest und wählen als solchen den Schnittpunkt dieser Tangente mit der linearen Polaren des Punktes x inbezug auf den Polarkegelschnitt $a_y^2 a_n = 0$:

$$a_x a_n a_y = 0. \tag{7.}$$

Dieser Schnittpunkt hat die Gleichung:

$$u_r = A \cdot a_x a_n a_x^2 (a\,a\,u) + B \cdot a_x a_n a_x'^2 (a\,a'\,u), \tag{8.}$$

wobei:

$$A = 6(a_x^2 a_z)^2 - S(a_x^2 a_z)^2, \quad B = 2\,T(a_x^2 a_z)^2 - 2\,S(a_x^2 a_z)(a_x^2 a_z).$$

Nun ist die Tangente (5.) durch die beiden Punkte n_i und r_i festgelegt, und um den 2. Schnittpunkt dieser Geraden mit dem C_2: $a_y^2 a_n = 0$, der ja die Grundkurve im Punkte N berührt, zu bestimmen, braucht man nur in $a_y^2 a_n = 0$ zu setzen: $y = r + \sigma n$. Es wird hieraus:

$$\sigma = -\frac{a_n a_r^2}{2\,a_r a_n^2}.$$

Der Berührungspunkt η_i hat dann die Form:

$$\eta_i = r_i - \frac{a_n a_r^2}{2\,a_r a_n^2} \cdot n_i. \tag{9.}$$

Jetzt gehen aber von dem Punkte η_i abermals 4 Tangenten an die C_3, wo wieder die Berührungspunkte bestimmt werden müssen. Es finden also dieselben Methoden wie oben Anwendung. Als Schnittgerade mit der C_4:

$$4\,a_y^3 b_y b_\eta^2 - 3\,a_y^2 a_\eta \cdot b_y^2 b_\eta = 0 \tag{10.}$$

soll nur jetzt die Tangente im Punkte x genommen werden:

$$y = \Delta x + \lambda n.$$

Wir haben dann für λ die Bedingungsgleichung:

$$2\lambda^2 \Delta^1 (\Delta a_x + \lambda a_u) a_\eta^2 + 3[(\Delta^2 a_x^2 + 2\Delta\lambda a_x a_u + \lambda^2 a_u^2) a_\eta]^2 = 0 \quad (11.)$$

wo: $a_\eta = a_r - \frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2} a_u$, $\qquad a_\eta^2 = a_r^2 - \frac{a_u a_r^2}{a_r a_u^2} \cdot a_r a_u + \left(\frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2}\right)^2 a_u^2$,

sodass also hiebei die Kovarianten auftreten:

$$\Delta a_x a_\eta^2 = \Delta\left(a_x a_r^2 - \frac{a_u a_r^2}{a_r a_u^2} a_x a_u a_r + \left(\frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2}\right)^2 a_x a_u^2\right)$$

$$\lambda a_u a_\eta^2 = \lambda\left(a_u a_r^2 - \frac{a_u a_r^2}{a_r a_u^2} a_r a_u^2 + \left(\frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2}\right) a_u^3\right) = 0$$

$$\Delta^2 a_x^2 a_\eta = \Delta^2\left(a_x^2 a_r - \frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2} \cdot a_x^2 a_u\right) = \Delta^2 a_x^2 a_r$$

$$2\Delta\lambda a_x a_u a_\eta = 2\Delta\lambda\left(a_x a_u a_r - \frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2} \cdot a_x a_u^2\right)$$

$$\lambda^2 a_u^2 a_\eta = \lambda^2\left(a_u^2 a_r - \frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2} \cdot a_u^3\right) = \lambda^2 a_u^2 a_r.$$

Zu berechnen ist demnach:

$$a_x^2 a_r = \frac{1}{6} A \Delta^3, \qquad a_r a_u^2 = \frac{1}{9} A \Delta^3 \psi + \frac{1}{36} B \Delta^5,$$

$$a_x a_r^2 = \frac{1}{9} A^2 \Delta^3 \psi - \frac{1}{18} A B \Delta^5, \qquad a_x a_u a_r = 0$$

$$a_u a_r^2 = \frac{4}{27} A^2 \Delta^4 \psi, \qquad \left(\frac{a_u a_r^2}{2 a_r a_u^2}\right) = C.$$

Die Gleichung 4. Grades für λ (11.) geht jetzt in Folgende über:

$$2\lambda^2 \Delta^4\left(\frac{1}{9} A^2 \Delta^4 \psi - \frac{1}{18} A B \Delta^6 - \frac{C}{6} \Delta^3\right)$$

$$+ 3\left[\frac{A}{6} \Delta^5 + \frac{\lambda}{3} \cdot C \Delta^4 + \lambda^2\left(\frac{1}{9} A \Delta^3 \psi + \frac{1}{36} B \Delta^5\right)\right]^2 = 0.$$

Jetzt bildet man wieder die Gleichung der Tangente der Kurve 4. Ordnung (10.) im Punkte ξ:

$$a_\xi^3 b_y b_\eta^2 + 3 a_y a_\xi^2 \cdot b_\xi b_\eta^2 - 3 a_y a_\xi a_\eta \cdot b_\xi^2 b_\eta = 0 \qquad (12.)$$

und das ist eine von den Geraden, in welche obige C_4 zerfällt, wenn man setzt:

$$\xi_i = \Delta x_i + \lambda^{(h)} n_i, \qquad h = 1, 2, 3, 4.$$

Zur Festlegung eines 2. Punktes auf der Geraden (12.) schneiden wir sie mit:

$$a_y a_\xi^2 = 0,$$

und erhalten als Schnittpunkt:

$$u_p = a_\xi^3 b_\eta^2 a_\xi'^2 (b a' u) - 3 b_\xi^2 b_\eta \cdot a_\xi'^2 a_\xi a_\eta (a a' u).$$

Es ermangelt jetzt noch den Berührungspunkt t_i der Tangente (12.) mit der C_3 ($f = 0$) als Schnittpunkt der Geraden $t_i = \eta_i + \mu p_i$ mit dem Polarkegelschnitt des Punktes η in Bezug auf $f = 0$:

$$a_\eta a_y^2 = 0$$

darzustellen. Der Parameter μ ist, wie man ohne Weiteres sieht:

$$\mu = -\frac{2 a_\eta^2 a_p}{a_\eta a_p^2}$$

und die Koordinaten t_i haben dann die Form:

$$t_i = r_i - \frac{a_n a_r^2}{2 a_r a_n^2} \cdot n_i - \frac{2 a_\eta^2 a_p}{a_\eta a_p^2} \cdot p_i, \tag{13.}$$

und damit ist zugleich eine Wurzel der Gleichung (1.) gefunden, nämlich:

$$\wp u = \frac{a_x'^2 a_t'}{a_x'^2 a_t'} = \frac{a_x'^2 a_r' - \frac{2 a_\eta^2 a_p}{a_\eta a_p^2} \cdot a_x'^2 a_p'}{a_x'^2 a_r' - \frac{2 a_\eta^2 a_p}{a_\eta a_p^2} \cdot a_x'^2 a_\rho'}, \tag{14.}$$

indem die Glieder, welche den Faktor $a_x^2 a_n = 0$ oder $a_x^2 a_n = 0$ enthalten, wegfallen.

Die in dem Quotienten (14.) auftretenden Ausdrücke lauten:

1. $a_x'^2 a_r' = A \cdot a_x'^2 a_x a_n a_x^2 (a a a') + B \cdot a_x'^2 a_x a_n a_x'^2 (a a' a')$
2. $a_x''^2 a_r'' = A \cdot a_x''^2 a_x a_n a_x^2 (a a a'') + B \cdot a_x''^2 a_x a_n a_x'^2 (a a' a'')$
3. $a_\eta^2 a_p = [c_r - C c_n]^2 \cdot \{a_\xi^3 b_\eta^2 a_\xi'^2 (b a' c) - 3 b_\xi^2 b_\eta \cdot a_\xi'^2 a_\xi a_\eta (a a' c)\}$
4. $a_\eta a_p^2 = [c_r - C c_n] \cdot \{a_\xi^3 b_\eta^2 a_\xi'^2 (b a' c) - 3 b_\xi^2 b_\eta \cdot a_\xi'^2 a_\xi a_\eta (a a' c)\}^2$

5. $a_x''^2 a_p'' = a_x''^2 [a_\xi^3 b_\eta^2 a_\xi'^2 (b\,a'\,a'') - 3\,b_\xi^2 b_\eta \cdot a_\xi'^2 a_\xi a_\eta (a\,a'\,a)]$

6. $a_x''^2 a_p'' = a_x''^2 [a_\xi^3 b_\eta^2 a_\xi'^2 (b\,a'\,a'') - 3\,b_\xi^2 b_\eta \cdot a_\xi'^2 a_\xi a_\eta (a\,a'\,a'')]$

7. $a_n a_r^2 = b_n [A\,a_x a_n a_x^2 (a\,a\,b) + B a_x a_n a_x'^2 (a\,a'\,b)]^2$

8. $a_n^2 a_r = b_n^2 [A\,a_x a_n a_x^2 (a\,a\,b) + B a_x a_n a_x'^2 (a\,a'\,b)]$.

Die Größen A, B und C haben hier die Bedeutung von p. 34 und 41.

Unter Zugrundelegung der Formeln:

$$a_x a_n a_x^2 (a\,a\,u) = \frac{2}{3} \Delta u_l + \frac{2}{3} \psi u_x,$$

$$a_x a_n a_x'^2 (a\,a'\,u) = -\frac{1}{6} \Delta^2 u_x$$

erhält man zunächst die bereits auf p. 41 vorkommenden Kovarianten:

$$a_n a_r^2 = A^2 \left[\frac{4}{9} \Delta^2 b_l^2 b_n + \frac{8}{9} \Delta \psi b_l b_n b_x + \frac{4}{9} \psi^2 b_x^2 b_n\right] - \frac{AB}{3} \Delta^2 b_x \left[\frac{2}{3} \Delta b_l b_n + \frac{2}{3} \psi b_x b_n\right]$$
$$+ \frac{B^2}{36} \Delta^4 b_x^2 b_n = \frac{4}{27} A^2 \Delta^4 \psi.$$

$$a_n^2 a_r = a_n^2 \left[A \left(\frac{2}{3} \Delta a_l + \frac{2}{3} \psi a_x\right) - \frac{B}{6} \Delta^2 a_x\right] = \frac{1}{9} A \Delta^3 \psi + \frac{1}{36} B \Delta^5,$$

und ebenso $a_x^2 a_r$ und $a_x^2 a_r$, sowie die nachher zu verwertenden Relationen:

$$a_r a_x a_l = -\frac{1}{24} B \Delta^4 \text{ und } a_r a_n a_l = \frac{1}{3} A \Delta^2 \Omega.$$

Was die Berechnung des Ausdruckes $a_x^2 a_p$ betrifft, so hat man für den ersten Summanden von $a_x^2 a_p$:

$$a_\xi^3 b_\eta^2 a_\xi'^2 a_x^2 (b\,a\,a)$$
$$= a_\xi^3 (b_r^2 - 2\,C b_r b_n + C^2 b_n^2) (\Delta^2 a_x^2 + 2\,\lambda^{(2)} \Delta a_x a_n + \lambda^{(h)2} a_n^2) \cdot (b\,a\,a) a_x^2.$$

Die einzelnen Faktoren dieses rechtsstehenden Ausdruckes bis auf

$$a_\xi^3 = -\frac{1}{2} \lambda^{h)2} \Delta^4$$

können in folgender Weise geschrieben werden:

1. $$\Delta^2 \cdot a_x^2 b_r^2 \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = \Delta^2 a_n a_r^2 = \frac{4}{27} A^2 \Delta^6 \psi$$

2. $$-2C\Delta^2 \cdot a_x^2 b_r b_n \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = -2C\Delta^2 a_r a_n^2 = -\frac{4}{27} A^2 \Delta^6 \psi$$

3. $$C^2 \Delta^2 \cdot a_x^2 b_n^2 \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = C^2 \Delta^2 b_n^3 = 0$$

4. $$2\lambda^{(h)} \Delta \cdot b_r^2 a_x a_n \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) =$$
$$2\lambda^{(h)} \Delta^4 \left\{ \frac{8}{27} A^2 \left(\frac{3}{4} \psi^2 - \frac{3}{128} S \Delta^4 \right) - \frac{AB}{27} \Delta^2 \psi + \frac{B^2}{72} \Delta^4 \right\}$$

5. $$-4C\lambda^{(h)} \Delta \cdot b_r b_n a_x a_n \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = -\frac{8}{9} \lambda^{(h)} C A \Delta^4 \Omega$$

6. $$2\lambda^{(h)} C^2 \Delta \cdot b_n^2 a_x a_n \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = 2\Delta C^2 \lambda^{(h)} b_n^2 \left(\frac{2}{3} \Delta b_l + \frac{2}{3} \psi b_x \right) =$$
$$\frac{2}{9} \lambda^{(h)} C^2 \psi \Delta^4$$

7. $$\lambda^{(h)2} \cdot b_r^2 a_n^2 \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = \lambda^{(h)2} \cdot \frac{2}{3} \psi b_n b_r^2 = \frac{8}{81} \lambda^{(h)2} A^2 \Delta^4 \psi^2$$

8. $$-2C\lambda^{(h)2} \cdot b_r b_n b_n^2 \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = -2\lambda^{(h)} C \cdot \left(\frac{2}{27} A \Delta^3 \psi^2 + \frac{1}{54} B \Delta^5 \psi \right)$$

9. $$C^2 \lambda^{(h)2} \cdot b_n^2 a_n^2 \quad \cdot a_x^2 (b\,a\,a) = 0.$$

Die Faktoren des 2. Gliedes von $a_x^2 a_p$:

$$-3 b_\xi^2 b_\eta \cdot a_\xi'^2 a_\xi a_\eta (a\,a'\,a'') a_x''^2$$

sind mit Ausnahme von:

$$-3 b_\xi^2 b_\eta = -\frac{1}{2} A \Delta^5 - \frac{1}{3} \lambda^{(h)2} \left(A \Delta^3 \psi + \frac{1}{4} B \Delta^5 \right) - C \lambda^{(h)} \Delta^4$$

folgende (wobei die Nummerierung fortgesetzt werden soll, um anzudeuten, daß alle Glieder zusammen $a_x^2 a_p$ vorstellen):

10. $$\Delta^3 \cdot a_x'^2 a_x a_r \quad \cdot a_x^2 (a\,a'\,a) = \Delta^3 a_r a_x a_n = 0$$

11. $$2\lambda^{(h)} \Delta^2 \cdot a_x' a_n' a_r a_x \cdot a_x^2 (a\,a'\,a) = \frac{4}{3} \lambda^{(h)} \Delta^3 a_r a_x a_l + \frac{4}{3} \lambda^{(h)} \Delta^2 \psi a_r a_x^2 =$$
$$-\frac{B}{18} \lambda^{(h)} \Delta^7 + \frac{2}{9} A \lambda^{(h)} \psi \Delta^5$$

12. $\lambda^{(h)2}\Delta\cdot a_n'^2 a_r a_x \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = \lambda^{(h)2}\Delta\cdot\frac{2}{3}\psi\, a_r a_x a_n = 0$

13. $-\Delta^3 C\cdot a_x'^2 a_x a_n \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = -C\Delta^3 a_x a_n^2 = \frac{1}{6}C\Delta^6$

14. $-2C\lambda^{(h)}\Delta^2\cdot a_x' a_n' a_x a_n\cdot a_x^2(a\,a'\,a) = -2C\lambda^{(h)}\Delta^2\left(\frac{2}{3}\Delta a_x a_n a_l+\frac{2}{3}\psi a_x^2 a_n\right) = 0$

15. $-\lambda^{(h)2}C\Delta\cdot a_n'^2 a_x a_n \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = -C\Delta\lambda^{(h)2}\cdot\frac{2}{3}\psi a_x a_n^2 = \frac{1}{9}\lambda^{(h)2}C\psi\Delta^4$

16. $\Delta^2\lambda^{(h)}\cdot a_x'^2 a_r a_n \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = \lambda^{(h)}\Delta^2 a_r a_n^2 = \lambda^{(h)}\left(\frac{1}{9}A\Delta^5\psi+\frac{1}{36}B\Delta^7\right)$

17. $2\lambda^{(h)2}\Delta\cdot a_x' a_n' a_r a_n\cdot a_x^2(a\,a'\,a) = 2\Delta\lambda^{(h)2}\left(\frac{2}{3}\Delta a_r a_n a_l+\frac{2}{3}\psi a_r a_n a_x\right) = \frac{4}{9}\lambda^{(h)2}A\Delta^4\Omega$

18. $\lambda^{(h)3}\cdot a_n'^2 a_r a_n \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = \lambda^{(h)3}\frac{2}{3}\psi a_r a_n^2 = \frac{2}{27}A\lambda^{(h)3}\Delta^3\psi^2+\frac{B}{54}\lambda^{(h)3}\psi\Delta^5$

19. $-\Delta^2 C\lambda^{(h)}\cdot a_x'^2 a_n^2 \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = -C\Delta^2 a_n^3\lambda^{(h)} = 0$

20. $-2\lambda^{(h)2}\Delta C\cdot a_x' a_n' a_n^2 \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = -2\Delta C\lambda^{(h)2}\left(\frac{2}{3}\Delta a_l a_n^2+\frac{2}{3}\psi a_x a_n^2\right) = -\frac{2}{9}\lambda^{(h)2}\psi C\Delta^4$

21. $-\lambda^{(h)3}C\cdot a_n'^2 a_n^2 \quad \cdot a_x^2(a\,a'\,a) = 0.$

In derselben Weise behandelt man den Ausdruck:

$$a_x^2 a_p.$$

Bezeichnet man die als Faktoren auftretenden Kovarianten in derselben Art wie $a_x^2 a_p$, so kann man sie ebenfalls in folgender Tabelle darstellen:

1. $\Delta^2\cdot a_x^2 b_r^2 \quad \cdot a_x'^2(b\,a\,a') = 0$
2. $-2C\Delta^2\cdot a_x^2 b_r b_n \quad \cdot a_x'^2(b\,a\,a') = 0$
3. $C^2\Delta^2\cdot a_x^2 b_n^2 \quad \cdot a_x'^2(b\,a\,a') = 0$

4. $2\lambda^{(h)}\Delta\cdot b_r^2 a_x a_n \cdot a_x'^2(b a a') = -\frac{1}{3}\lambda^{(h)}\Delta^3 b_r^2 b_x = -\frac{1}{27}\lambda^{(h)}A^2\Delta^6\psi + \frac{AB}{54}\lambda^{(h)}\Delta^8$

5. $-4C\lambda^{(h)}\Delta\cdot b_r b_n a_x a_n \cdot a_x'^2(b a a') = \frac{2}{3}C\lambda^{(h)}\Delta^3 b_r b_n b_x = 0$

6. $2\lambda^{(h)}C^2\Delta\cdot b_n^2 a_x a_n \cdot a_x'^2(b a a') = -\frac{1}{3}\lambda^{(h)}C^2\Delta^3 b_n^2 b_x = \frac{1}{18}\lambda^{(h)}C^2\Delta^6$

7. $\lambda^{(h)2}\cdot b_r^2 a_n^2 \cdot a_x'^2(b a a') = \frac{1}{6}\lambda^{(h)2}\Delta^2 b_r^2 b_n = \frac{2}{81}A^2\lambda^{(h)}\Delta^6\psi$

8. $-\lambda^{(h)2}2C\cdot b_r b_n a_n^2 \cdot a_x'^2(b a a') = -\frac{1}{3}\lambda^{(h)2}C\Delta^2 b_r b_n^2 = -\frac{1}{27}\lambda^{(h)2}CA\Delta^5\psi - \frac{B}{108}\lambda^{(h)2}C\Delta^7$

9. $\lambda^{(h)2}C^2\cdot b_n^2 a_n^2 \cdot a_x'^2(b a a') = 0$

10. $\Delta^3\cdot a_x'^2 a_r a_x \cdot a_x''^2(a a' a'') = 0$

11. $2\lambda^{(h)}\Delta^2\cdot a_x' a_n' a_r a_x \cdot a_x''^2(a a' a'') = -\frac{1}{3}\lambda^{(h)}\Delta^4 a_r a_x^2 = -\frac{1}{18}A\lambda^{(h)}\Delta^7$

12. $\lambda^{(h)2}\Delta\cdot a_n'^2 a_r a_x \cdot a_x''^2(a a' a'') = \frac{1}{6}\lambda^{(h)2}\Delta^3 a_r a_x a_n = 0$

13. $-\Delta^3 C\cdot a_x'^2 a_x a_n \cdot a_x''^2(a a' a'') = 0$

14. $-2C\lambda^{(h)}\Delta^2\cdot a_x' a_n' a_x a_n \cdot a_x''^2(a a' a'') = \frac{1}{3}C\lambda^{(h)}\Delta^4 a_x^2 a_n = 0$

15. $-\lambda^{(h)2}C\Delta\cdot a_n'^2 a_x a_n \cdot a_x''^2(a a' a'') = -\frac{\lambda^{(h)2}}{6}C\Delta^3 a_x a_n^2 = \frac{1}{36}\lambda^{(h)2}C\Delta^6$

16. $\Delta^2\cdot a_x'^2 a_r a_n \cdot a_x''^2(a a' a'') = 0$

17. $2\lambda^{(h)2}\Delta\cdot a_x' a_n' a_r a_n \cdot a_x''^2(a a' a'') = -\frac{1}{3}\lambda^{(h)2}\Delta^3 a_r a_n a_x = 0$

18. $\lambda^{(h)3}\cdot a_n'^2 a_r a_n \cdot a_x''^2(a a' a'') = \frac{1}{6}\lambda^{(h)3}\Delta^2 a_r a_n^2 = \frac{A}{54}\lambda^{(h)3}\psi\Delta^5 + \frac{B}{216}\lambda^{(h)3}\Delta^7$

19. $-\Delta^2 C\cdot a_x'^2 a_n^2 \cdot a_x''^2(a a' a'') = 0$

20. $$-2\lambda^{(h)2}\Delta C\cdot a_x' a_n' a_n^2 \quad \cdot a_x''^2(aa'a'') = \frac{1}{3}\lambda^{(h)2} C\Delta^3 a_n^2 a_x = -\frac{1}{18}\lambda^{(h)2} C\Delta^6$$

21. $$-\lambda^{(h)3} C\cdot a_n'^2 a_n^2 \quad \cdot a_x''^2(aa'a'') = 0.$$

Genau so kann man auch $a_\eta^2 a_p$ und $a_\eta a_p^2$ durch die Grundformen Δ, ψ und Ω ausdrücken, so daß man das Resultat hat:

Setzt man in Gleichung (14.) pag. 42 der Reihe nach

$$\varrho = 1, 2, 3 \text{ und } \lambda = 1, 2, 3, 4,$$

so erhält man 12 Wurzeln der Gleichung (1.) pag. 38. Alle im Zähler und Nenner auftretenden Kovarianten sind in den Koordinaten des festen Punktes x geschrieben und lassen sich durch Δ, ψ und Ω darstellen.

12 Wurzeln der Gleichung (1.) haben wir nur deshalb erhalten, weil wir durch das Ziehen der 4 Tangenten vom Punkte N aus auch auf den Punkt x zurückkommen und diesen Fall weggelassen haben. Wir müssen hier von x aus die 4 weiteren Tangenten ziehen, um die noch übrigen 4 Berührungspunkte zu finden.

Die Gleichung der 4 Tangenten vom Punkte x aus ist:

$$4 a_y^3 b_y b_x^2 - 3 a_y^2 a_x \cdot b_y^2 b_x = 0 \qquad (15.)$$

und behufs der Faktorenzerlegung dieses Produktes sei die Schnittgerade die Tangente im Punkte N:

$$y_i = \zeta_i + \sigma n_i,$$

n_i die Koordinaten des ersten und ζ_i die des zweiten Tangentialpunktes von x, wo

$$u_\zeta = \frac{3}{2}\Omega u_k + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32} S\Delta^4\right) u_n \quad \text{(pag. 37.)}$$

Die Bedingungsgleichung für σ wird:

$$\begin{aligned} &4\,(3\,\sigma a_\zeta^2 a_n + 3\,\sigma^2 a_\zeta a_n^2)(b_\zeta b_x^2 + \sigma b_n b_x^2) \\ &- 3\,(a_\zeta^2 a_x + 2\,\sigma a_\zeta a_n a_x + \sigma^2 a_n^2 a_x)^2 = 0. \end{aligned} \qquad (16.)$$

Die einzelnen Glieder dieser Gleichung sind:

$$a_x^2 a_\zeta = \frac{3}{8}\Delta^3\Omega$$

$$a_x a_\zeta^2 = \frac{27}{16}\psi\Delta^3\Omega^2 - \frac{27}{32}\psi^4\Delta^3 - \frac{3}{32^2} S^2\Delta^{11} + \frac{9}{16\cdot 32} S\Delta^7\psi,$$

$$a_\zeta a_x a_n = \frac{3}{2}\Omega a_x a_n a_k + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right)a_x a_n^2$$

$$= -\frac{3}{8}\psi^2\Delta^3 + \frac{1}{256}S\Delta^7,$$

$$a_\zeta a_n^2 = \frac{3}{2}\Omega a_k a_n^2 + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right)a_n^3 = 0$$

$$a_\zeta^2 a_n = a_n a_{ck+dn}^2 \quad \text{(nach der Bezeichnungsweise von p. 37)}$$

$$= c^2 a_k^2 a_n + 2cd\, a_k a_n^2 + d^2 a_n^3$$

$$= \frac{9}{8}\Delta^3\Omega^3.$$

Die Gleichung (16.) geht also über in:

$$4\sigma a_\zeta^2 a_n \cdot b_\zeta b_x^2 - (a_\zeta^2 a_x + 2\sigma a_\zeta a_x a_n + \sigma^2 a_n^2 a_x)^2 = 0.$$

Die Gleichung der Tangente der C_4 (15.) im Punkte z ist:

$$a_z^3 \cdot b_y b_x^2 + 3a_y a_z^2 \cdot b_z b_x^2 - 3a_y a_z a_x \cdot b_z^2 b_x = 0, \qquad (17.)$$

wo

$$z_i = \zeta_i + \sigma^{(m)} n_i, \qquad m = 1, 2, 3, 4$$

und ein weiterer Punkt auf ihr ist der Schnittpunkt dieser Tangente mit der Geraden:

$$a_y a_z^2 = 0$$

nämlich:

$$u_p = a_z^3 \cdot b_x^2 a_z'^2 (b a' u) - 3b_z^2 b_x \cdot a_z'^2 a_z a_x (a a' u).$$

Der Schnittpunkt t_i dieser Tangente (17.) mit dem Polar-C_2 von x inbezug auf $f = 0$:

$$a_y^2 a_x = 0$$

bestimmt sich dann aus:

$$t_i = x_i + \mu p_i,$$

wo

$$\mu = -\frac{2a_x^2 a_p}{a_x a_p^2}$$

und die 4 noch übrigen Wurzeln der Gleichung (1.) pag. 38 werden:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_t}{a_x^2 a_t} = \frac{\Delta - \dfrac{2\,a_x^2 a_p}{a_x a_p^2} \cdot \alpha_x^2 \alpha_p}{-\dfrac{2\,a_x^2 a_p}{a_x a_p^2} \cdot \alpha_x'^2 a_p'}$$

$$= \frac{\Delta\, a_x a_p^2 - 2\,a_x^2 a_p \cdot \alpha_x^2 \alpha_p}{-2\,(a_x^2 a_p)^2}, \qquad (18.)$$

wo $m = 1, 2, 3, 4$ gesetzt wird und die $a_x a_p^2$, $a_x^2 a_p$ und $\alpha_x^2 \alpha_p$ sich ebenfalls durch Δ, ψ und Ω ausdrücken lassen.

§ 4.

Gesucht werden die Punkte, in welchen ein Kegelschnitt die Kurve 3. Ordnung von der 2. Ordnung berührt, wenn er außerdem im Punkt x ebenfalls eine Berührung 2. Ordnung haben soll.

Es gilt:

$$3u + 2u_0 \equiv 0$$

$$\wp\, 3u = \wp\, 2u_0 \qquad (1.)$$

und diese Gleichung 9. Grades in $\wp u$ soll aufgelöst werden.

Da jede durch einen Wendepunkt der Kurve 3. Ordnung gehende Gerade durch ihre beiden andern Schnittpunkte mit derselben 2 solche Punkte bestimmt, in denen gleichzeitig ein Kegelschnitt von der 2. Ordnung berühren kann[1]), so braucht man nur den Punkt x mit jedem der 9 Wendepunkte zu verbinden und immer den 3. Schnittpunkt mit der C_3 aufzusuchen.

Der 3. Schnittpunkt $t_i = s_i + \lambda x_i$, wenn s_i die Koordinaten eines Wendepunkt sind und wenn

$$\lambda = -\frac{a_s^2 a_x}{a_x^2 a_s},$$

wird:

$$t_i = s_i - \frac{a_s^2 a_x}{a_x^2 a_s} \cdot x_i.$$

---

[1]) Clebsch-Lindemann p. 534.

Eine Wurzel der Gleichung (1.) wird also:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_s - \frac{a_s^2 a_x}{a_x^2 a_s} \cdot \Delta}{a_x^2 a_s} = \frac{a_x^2 a_s \cdot a_x^2 a_s - \Delta a_s^2 a_x}{(a_x^2 a_s)^2} \tag{2.}$$

Setzt man hier der Reihe nach für s_i die Koordinaten eines andern Wendepunktes ein, so erhält man alle 9 Wurzeln der Gleichung (1.).

Im Anschlusse an Gleichung (1.) wollen wir noch die Gleichung:

$$\wp 3u = 0 \tag{3.}$$

behandeln, welche bei den Steinerschen Polygonen für $n = 3$ auftrat. Eine Wurzel ist bereits bekannt:

$$\wp u = \infty$$

und die andern finden wir, wenn wir die auf p. 18 angegebene Konstruktion anwenden. Für den 1. Schnittpunkt s_i und für den 2. t_i wird:

$$s_i = x_i + \lambda r_i \qquad \lambda = -\frac{a_x^2 a_r}{a_r a_x^2}$$

wo

$$t_i = s_i + \sigma q_i \qquad \sigma = -\frac{a_s^2 a_q}{a_s a_q^2}$$

und r_i und q_i die Koordinaten zweier Wendepunkte sind.

Eine Wurzel der Gleichung (3.) ist dann:

$$\wp u = \frac{a_x''^2 a_t''}{a_x''^2 a_t''} = \frac{a_x''^2 a_s'' - \frac{a_s'^2 a_q'}{a_s' a_q'^2} \cdot a_x''^2 a_q''}{a_x''^2 a_s'' - \frac{a_s'^2 a_q'}{a_s' a_q'^2} \cdot a_x''^2 a_q''} \tag{4.}$$

$$= \frac{a_x''^2 a_s'' - M \cdot a_x''^2 a_q''}{a_x''^2 a_s'' - M \cdot a_x''^2 a_q''}, \qquad \text{wo } M = \frac{\left(a_x' - \frac{a_x^2 a_r}{a_x a_r^2} \cdot a_r'\right)^2 a_q'}{\left(a_x' - \frac{a_x^2 a_r}{a_x a_r^2} \cdot a_r'\right) a_q'^2}$$

und wo die Kovarianten $a_x^2 a_r$ und $a_x a_r^2$ sich wie auf pag. 29 erledigen lassen.

Ebenso kann man die Gleichung:

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - 2S\wp u + \frac{4}{3}T = 0, \qquad (5.)$$

welche uns auf pag. 13 beschäftigte, auflösen. Auf pag. 39 haben wir die Gleichung der 3 Tangenten, welche vom Punkt N ausgehen, in ihre Faktoren zerlegt und die Berührungspunkte η_i mit der C_3 gesucht. Es war:

$$\eta_i = r_i - \frac{a_n a_r^2}{2 a_r a_n^2} \cdot n_i.$$

Setzt man in Gleichung (5.):

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_y}{a_x^2 a_y},$$

so hat man sofort eine Wurzel dieser Gleichung in der Form:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_\eta}{a_x^2 a_\eta} = \frac{a_x^2 a_r}{a_x^2 a_r} = \frac{B}{A}$$
$$= \frac{2T(a_x^2 a_z)^2 - 2S(a_x^2 a_z)(a_x^2 a_z)}{6(a_x^2 a_z)^2 - 2S(a_x^2 a_z)^2};$$

hierbei hat z wieder die Bedeutung:

$$z = \Delta^5 x_i + \varrho^{(h)} s_i, \qquad h = 1, 2, 3.$$

§ 5.

Bevor wir weitergehen, wollen wir zunächst einige Formeln ableiten, die wir im folgenden nötig haben. Hierzu gehen wir von der typischen Darstellung für die Grundform $f(y)$ aus:

$$\Gamma f(y) = f\Delta_H + \Gamma_1 H(y) \quad \text{(C.-L. p. 645.)} \quad (1.)$$

und suchen zunächst a_k^3 und a_l^3, d. h. wir setzen $y_i = k_i$ bezw. l_i; dadurch wird

$$\xi = 4(k'nk) = 0 \qquad = 4(lnk) = -2\psi\Gamma_1$$
$$\eta = 4(xk'k) = 0 \quad \text{bezw.} \quad = 4(xlk) = 0$$
$$\zeta = 4(xnk) = \Gamma \qquad = 4(xnl) = \Gamma_1.$$

Man erhält:

$$\Gamma^2 H(k) = \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32} S_{\Delta, -f}\right)\Gamma^3$$

$$\Delta_H(k) = -\Gamma\left(4\psi^3 - \frac{1}{8}\psi S_{\Delta, -f} + \frac{1}{48} T_{\Delta, -f}\right)$$

$$H(l) = \frac{3}{4}\Delta\psi^2 - \frac{3}{128} S\Delta^5$$

und hieraus:

$$a_k^3 = -f\left(4\psi^3 - \frac{1}{8}\psi S_{\Delta, -f} + \frac{1}{48} T_{\Delta, -f}\right) + \frac{3}{4}\Gamma_1\left(3\psi^2 - \frac{1}{32} S_{\Delta, -f}\right) \quad (2.)$$

$$a_l^3 = \frac{3}{4}\psi^2 - \frac{3}{128} S\Delta^4 \ (\text{mod. } f). \quad (3.)$$

Um nun $a_n a_k^2$ und $a_n^2 a_k$ zu bilden, muß man Gleichung (1.) differenzieren:

$$\Gamma 3 a_y^2 a_z = f\left(\frac{\partial \Delta_H}{\partial \xi}\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial \Delta_H}{\partial \eta}\Sigma\frac{\partial \eta}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial \Delta_H}{\partial \zeta}\Sigma\frac{\partial \zeta}{\partial y_i} z_i\right)$$
$$+ \Gamma_1\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial H}{\partial \eta}\Sigma\frac{\partial \eta}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial H}{\partial \zeta}\Sigma\frac{\partial \zeta}{\partial y_i} z_i\right),$$

wo

	für $z = k$	für $z = n$
$\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial y_i} z_i = 4(z n k) =$	0,	$= 0$
$\Sigma\frac{\partial \eta}{\partial y_i} z_i = 4(x z k) =$	0,	$= \Gamma$
$\Sigma\frac{\partial \zeta}{\partial y_i} z_i = 4(x n z) =$	Γ,	$= 0$.

Um schließlich $a_n^2 a_k$ und $a_n a_k^2$ zu erhalten, setzt man:

$\xi =$	0,	0
$\eta =$	Γ,	0
$\zeta =$	0,	Γ.

Es wird:

$$a_n^2 a_k = 0, \qquad a_k^2 a_n = \frac{1}{2}\Omega\Delta^3, \quad (4.)$$

$$a_n^2 a_l = \frac{1}{3}\psi\Delta^2, \qquad a_n a_l^2 = \frac{1}{2}\Omega\Delta. \quad (5.)$$

Um ferner eine Kovariante von dem Typus:

$$(\psi a u)\psi_x^5 a_x^2$$

zu behandeln, gehen wir aus von:

$$\Gamma(\psi a u) = 4(\psi a u)(x n k) = 4\begin{vmatrix} \psi_x & \psi_n & \psi_k \\ a_x & a_n & a_k \\ u_x & u_n & u_k \end{vmatrix}$$

$$= 4\{\Omega u_x \cdot a_k a_x^2 - u_n(\psi a_k a_x^2 - f\psi_k) - u_k \Omega f\}.$$

Da

$$\psi_k = \frac{1}{6}\sum \frac{\partial \psi}{\partial x_i} k_i = -\frac{1}{48} S_{\Delta, -f} + 2\psi^2,$$

so kann man $\Gamma(\psi a u)$ in der Form darstellen:

$$\Gamma(\psi a u) = A u_n + B u_k + C u_x, \tag{6.}$$

wo

$$A = -\psi \Delta^3, \qquad B = 0 \text{ und } C = \Omega \Delta^3.$$

Hat man also z. B. die Kovariante $b_k^2 \psi_x^5 a_x^2 (\psi a b)$, so bildet man:

$$b_k^2 \Gamma(b_x)_{x=(\psi a)_i} = b_k^2(A b_n + B b_k + C b_x)$$

$$= \frac{1}{4}\psi \Omega \Delta^6,$$

also:

$$b_k^2 \psi_x^5 a_x^2 (\psi a b) = \frac{1}{4}\psi \Omega \Delta^2.$$

Ebenso behandelt man:

$$b_k \Gamma^2 (b_x)^2_{x=(\psi a)_i} = b_k(A b_n + C b_x)^2$$

$$= a_k(A^2 a_n^2 + C^2 a_x^2 + 2 A C a_n a_x) = \frac{1}{4}\Omega^2 \Delta^9$$

und hieraus:

$$b_k \cdot \psi_x^5 a_x^2 (\psi a b) \cdot \psi_x'^5 a_x'^2 (\psi' a' b) = \frac{1}{4}\Delta \Omega^2.$$

§ 6.

Wir kommen nun zu dem Fall, wo der Kegelschnitt eine Berührung 3. Ordnung in einem gegebenen Punkt haben soll und suchen die Punkte u, in welchen er die C_3 nochmals berühren kann.

Diese sind gegeben durch die Relation:

$$2u + 2u_0 \equiv 0 \tag{1.}$$

$$\wp 2u = \wp 2u_0. \tag{2.}$$

Die gesuchten Punkte sind die Berührungspunkte der Tangenten, welche vom 2. Tangentialpunkt aus an die C_3 gezogen werden können. Da einer von diesen Berührungspunkten der 1. Tangentialpunkt ist, so ist eine Wurzel der Gleichung (2.):

$$\wp u = \wp u_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}. \tag{3.}$$

Die Gleichung der noch übrig bleibenden 3 Tangenten ist:

$$(a_n^2 a_y)^3 - \frac{S}{2}(a_n^2 a_y)(a_n^2 a_y)^2 + \frac{T}{3}(a_n^2 a_y)^3 = 0, \tag{4.}$$

indem in der analog gebauten Gleichung in Clebsch-Lindemann pag. 773 die x_i mit den n_i vertauscht sind.

Die C_3 (4.) schneiden wir mit den Geraden $y_i = \Delta x_i + \varrho n_i$ und erhalten als Bedingungsgleichung für ϱ:

$$\begin{aligned}\frac{64}{3}\varrho^3\Delta^3\Omega^3 + 32\varrho^2\Delta^4\psi\Omega^2 + \varrho\left(16\psi^2\Delta^5\Omega - \frac{S}{6}\Delta^9\Omega\right)\\ + \left(\frac{8}{3}\psi^3\Delta^6 + \frac{T\Delta^{12}}{72} - \frac{S}{12}\Delta^{10}\psi\right) = 0.\end{aligned} \tag{5.}$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte z der C_3 (4.) wird:

$$a_n^2 a_y\{2T(a_n^2 a_z)^2 - 2S(a_n^2 a_z)(a_n^2 a_z)\} + a_n^2 a_y\{6(a_n^2 a_z)^2 - S(a_n^2 a_z)^2\} = 0, \tag{6.}$$

wo $$z = \Delta x + \varrho^{(h)} n, \qquad h = 1, 2, 3$$

und ein weiterer Punkt auf ihr ist der Schnittpunkt derselben mit der Geraden:

$$a_x^2 a_y = 0$$

nämlich:

$$u_t = A a_n^2 a_x^2 (a' a u) + B a_n^2 a_x^2 (a a u), \tag{7.}$$

wo:

$$A = 2T(a_n^2 a_z)^2 - 2S(a_n^2 a_z)(a_n^2 a_z),$$
$$B = 6(a_n^2 a_z)^2 - S(a_n^2 a_z)^2.$$

Um schließlich den gesuchten Berührungspunkt r_i zu finden,

braucht man nur wieder den Schnittpunkt der Tangente (6.) mit dem Polarkegelschnitt:

$$a_y^2 a_\xi = 0$$

zu suchen, wenn ξ_i die Koordinaten des 2. Tangentialpunktes sein sollen.

Es wird demnach:

$$r_i = \xi_i + \mu t_i, \qquad \mu = -\frac{2 a_\xi^2 a_t}{a_\xi a_t^2}, \tag{8.}$$

und eine Wurzel der Gleichung (2.):

$$\varrho u = \frac{a_x^2 a_r}{a_x^2 a_r} = \frac{a_x^2 a_\xi - M\left[A a_n^2 a_x'^2 a_x^2 (a' a a) + B a_n^2 a_x^2 a_x'^2 (a a a')\right]}{a_x^2 a_\xi}, \tag{9.}$$

wenn

$$M = \frac{2\left[A a_\xi''^2 a_n^2 a_x'^2 (a' a a'') + B (a a a'') a_\xi''^2 a_n^2 a_x^2\right]}{a_\xi''\left[A a_n^2 a_x'^2 (a' a a'') + B a_n^2 a_x^2 (a a a'')\right]^2},$$

indem das 2. Glied im Nenner des Quotienten (9.), da es den Faktor

$$A a_x''^2 a_n^2 a_x'^2 (a' a a'') + B a_x''^2 a_n^2 a_x^2 (a a a'') = 0$$

enthält, ebenfalls Null wird.

Zur Berechnung der einzelnen Kovarianten, welche im rechtsstehenden Quotienten vorkommen, benutzen wir die beiden Relationen:

$$a_n^2 a_x'^2 (a' a u) = -\frac{\Delta^2}{6} u_n,$$

$$a_n^2 a_x^2 (a a u) = \frac{2}{3} \psi u_n + \frac{4}{3} \Delta \psi_x^5 a_x^2 (\psi a u).$$

Dann wird:

$$1.\quad a_n^2 a_z = \frac{2}{3} \psi a_x^2 a_z - \frac{1}{6} \Delta^2 a_x^2 a_z$$

$$= -\frac{1}{6} \Delta^4, \qquad \text{wenn } z = \Delta x + \varrho^{(h)} n,$$

$$2.\quad a_n^2 a_z = \frac{2}{3} \psi a_x^2 a_z - \frac{1}{12} S \Delta^2 a_x^2 a_z - \frac{4}{3} \Delta \psi_x^5 \psi_z$$

$$= -\frac{2}{3} \psi \Delta^2 - \frac{4}{3} \varrho^{(h)} \Delta \Omega.$$

Ferner:

$$3.\quad a_x'^2\, a_n^2\, a_x^2 (a\, a\, a') = \frac{4}{3} \Delta\, \Omega$$

$$4.\quad a_x^2\, a_n^2\, a_x'^2 (a'\, a\, a) = 0;$$

$a_x^2\, a_\xi$ und $a_x^2\, a_\xi$ sind nach Früherem bekannt.

Da

$$b_\xi^2 = c^2\, b_k^2 + 2\, c\, d\, b_k\, b_n + d^2\, b_n^2$$ [1])

wo

$$c = \frac{3}{2}\, \Omega, \quad d = \frac{3}{4}\left(3\, \psi^2 - \frac{1}{12}\, S\, \Delta^4\right)$$

so bekommen wir weiter:

$$5.\quad a_\xi''^2\, a_n^2\, a_x'^2 (a'\, a\, a'') = -\frac{3}{16}\, \Delta^5\, \Omega^3$$

$$6.\quad a_\xi^2\, a_n^2\, a_x^2 (a\, a\, a'') = \frac{3}{4}\, \Delta^3\, \Omega^3\, \psi + \frac{4}{3}\, \Delta \{c^2\, b_k^2\, \psi_x^5\, a_x^2 (\psi\, a\, b) + 2\, c\, d \cdot b_k\, b_n\, \psi_x^5\, a_x^2 (\psi\, a\, b) + d^2\, b_n^2\, \psi_x^5\, a_x^2 (\psi\, a\, b)\},$$

durch Anwendung der Relationen von pag. 53 wird:

$$b_k^2\, \psi_x^5\, a_x^2 (\psi\, a\, b) = \frac{1}{4}\, \psi\, \Omega\, \Delta^2$$

$$b_k\, b_n\, \psi_x^5\, a_x^2 (\psi\, a\, b) = 0$$

$$b_n^2\, \psi_x^5\, a_x^2 (\psi\, a\, b) = -\frac{1}{6}\, \Delta^2\, \Omega,$$

so daß schließlich wird:

$$6.\quad a_\xi''^2\, a_n^2\, a_x^2 (a\, a\, a'') = \frac{3}{2}\, \Delta^3\, \Omega^3\, \psi - \frac{\Delta^3\, \Omega}{8}\left(3\, \psi^2 - \frac{1}{12}\, S\, \Delta^4\right)$$

$$7.\quad a_\xi''\left[(a'\, a\, a'')\, a_n^2\, a_x'^2\right]^2 = 0$$

$$8.\quad a_\xi''\left[(a\, a\, a'')\, a_n^2\, a_x^2\right]^2 = \frac{2}{3}\, \Delta^3\, \Omega^3 + \frac{2}{9}\, \Delta^3\, \psi\, \Omega\left(3\, \psi^2 - \frac{1}{32}\, S\, \Delta^4\right)$$

$$9.\quad a_\xi\left[(a'\, a\, a'')\, a_n^2\, a_x'^2\right]\left[(a\, a\, a'')\, a_n^2\, a_x^2\right] = \frac{1}{36}\, \Delta^5\, \Omega\left(3\, \psi^2 - \frac{1}{32}\, S\, \Delta^4\right).$$

---

[1]) Cf. pag. 37 dieser Arbeit.

§ 7.

Ein Kegelschnitt soll in 3 Punkten, welche auf einer Kurve 3. Ordnung liegen, einfach berühren. 2 Berührungspunkte können wir immer beliebig annehmen, der dritte ist dann durch den Satz[1]) bestimmt:

„Die Tangentialpunkte der 3 Punkte, in denen ein Kegelschnitt die C_3 einfach berührt, liegen auf einer Geraden."

Als gegebene Punkte benützen wir den Punkt x (Argument $= 0$) und einen Wendepunkt s (Argument $= v$). Für den gesuchten Punkt u gilt dann:

$$2u + 2v + 2u_0 \equiv 0$$

$$\wp 2u = \wp(2v + 2u_0)$$

und nach dem Additionstheorem für die $\wp$-Funktion:

$$\wp 2u = \frac{[\wp 2u_0 + \wp 2v][2\wp 2u_0 \cdot \wp 2v - S] + \frac{4}{3}T - \wp' 2u_0 \cdot \wp' 2v}{2[\wp 2u_0 - \wp 2v]^2}, \quad (1.)$$

wo

$$\wp 2u_0 = -\frac{8\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\psi^2 - S\Delta^4)^2}{1536\Delta^2\Omega},$$

$$\wp 2v = \wp v - \frac{1}{4}\frac{12\wp v \cdot \wp'^2 v - \wp''^2 v}{\wp'^2 v}.$$

Hier setzt man noch:

$$\wp v = \frac{a_x^2 a_s}{a_x^2 a_s}, \qquad \wp' v = \sqrt{4\wp^3 v - 2S\wp v + \frac{4}{3}T},$$

wo also s_i die ternären Koordinaten des Wendepunktes sind, und ihm das positive Vorzeichen der Quadratwurzel zukommen soll.

Konstruiert[2]) man nun die Tangenten im Punkte x und s, und verbindet den Punkt N mit s, so erscheint der 3. Schnittpunkt dieser Geraden mit der C_3 in der Form:

$$\eta_i = s + \lambda n_i, \qquad \lambda = -\frac{a_s^2 a_n}{a_s a_n^2}; \quad (2.)$$

---

[1]) Clebsch-Lindemann pag. 533. [2]) Clebsch-Lindemann pag. 534.

die Gleichung der 4 Tangenten vom Punkte η aus an die C_3 ist:

$$4\,a_y^3 b_y b_\eta^2 - 3\,(a_y^2 a_\eta)^2 = 0 \tag{3.}$$

und eine Tangente heißt:

$$a_\xi^3 \cdot b_y b_\eta^2 + 3\,a_y a_\xi^2 \cdot b_\xi b_\eta^2 - 3\,a_y a_\xi a_\eta \cdot b_\xi^2 b_\eta = 0, \tag{4.}$$

wo

$$\xi_i = \Delta x_i + \varrho^{(h)} n_i$$

und ϱ durch eine biquadratische Gleichung bestimmt wird.

Der gesuchte Berührungspunkt t_i der Tangente (4.) an die C_3 wird dann nach Früherem:

$$t_i = s_i - \frac{a_s^2 a_n}{a_s a_n^2} n_i - \frac{2\,a_\eta^2 a_p}{a_\eta a_p^2} p_i. \tag{5.}$$

Eine Wurzel der Gleichung (1.) ist dann:

$$\wp u = \frac{a_x^2 a_s - \dfrac{2\,a_\eta^2 a_p}{a_\eta a_p^2} \cdot a_x^2 a_p}{a_x^2 a_s - \dfrac{2\,a_\eta^2 a_p}{a_\eta a_p^2} \cdot a_x'^2 a_p'}, \tag{6.}$$

wo die im rechtsstehenden Quotienten vorkommenden Kovarianten sich nach denselben Methoden, die bei den vorhergehenden Aufgaben angewandt wurden, durch Δ, ψ und Ω ausdrücken lassen.

Vita.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit wurde am 2. Mai 1879 in Zwiesel geboren. Nachdem er die K. Kreisrealschule Passau absolviert hatte, besuchte er das K. Realgymnasium München. Nach Ablegung des Gymnasialabsolutoriums bezog er im Herbste 1900 die K. Ludwig-Maximilians-Universität München, wo er sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften widmete.